

-
- **Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare samt utdelad formelsamling (häftad med tentamen).
 - Tentamen består av 10 uppgifter om 0.6 poäng vardera, med delpoäng om minst 0.1 poäng.
 - Betygsgränser: Betyg 3 (godkänt): 3.0 poäng. Betyg 4: 4.0 poäng. Betyg 5: 5.0 poäng.
 - **Tips:** Läs genom hela tentamen och börja med den uppgift du anser vara lättast.
 - Resultatet läggs in i Ladok senast *fredag 22 november 2024*.
 - För övriga instruktioner, se tentamensomslagets insida.
-

1. Ett företag tillverkar kretskort på kiselsubstrat i två olika fabriker; den ena fabriken ligger på Taiwan och av deras kretskort är 0.1 % defekta. Den andra fabriken ligger i Kalifornien och av deras kretskort är 3 % defekta.
 - (a) Om företagets huvudlager innehåller 20 % kretskort tillverkade i Kalifornien och resten på Taiwan, vad är sannolikheten att ett slumpmässigt valt kretskort ur huvudlagret är defekt? (0.3)
 - (b) En kund reklamerar ett kretskort som defekt. Vad är sannolikheten att det tillverkades i Kalifornien? (0.3)
2.
 - (a) Hur många delmängder (subsets) har $A := \{1, 2, 3\}$, inklusive mängden (the set) A and den tomma mängden (the null/empty set)? Kom ihåg att mängden av alla delmängder kallas potensmängd (Power set). (0.2)
 - (b) Härled formeln för kardinaliteten av potensmängden (the cardinality of the power set) för en mängd med n element. (0.2)
 - (c) I en grupp av 20 personer så spelar 15 fotboll och 12 cricket. Om alla 20 spelar minst en sport, hur många spelar båda sporterna? (0.2)
3. Låt en LED-lampas livslängd ξ vara exponentialfördelad med väntevärde $\lambda^{-1} = 30000$ timmar.
 - (a) Härled fördelningsfunktionen för ξ , $F(x)$, och skissera den. (0.4)
 - (b) Antag att lamporna lyser dygnet runt och att ett år består av 365 dagar. Vad är sannolikheten $p = P(\text{lamporna går sönder inom ett år})$? (0.2)
4. Bevisa att relationen \mathcal{R} , definierad som $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{7}$, är en ekvivalens relation (equivalence relation). Kom ihåg att, $x \equiv y \pmod{7}$ innebär att $(x - y)$ är delbart med 7, Till exempel $x = 12$ och $y = 19$. (0.6)

Var god vänd!

5. I hörsal U202 finns totalt 25 LED-lampor som går sönder oberoende av varandra. Sannolikheten att en lampa går sönder inom ett år är p , där p är svaret från uppgift 3(b). Vaktmästaren byter ut trasiga lampor en gång per år. Om du inte har löst uppgift 3 kan du använda $p = 0.2$.

(a) Hur många av dessa lampor förväntas *fungera* efter ett års användning? (0.2)

(b) Vad är sannolikheten att minst fem lampor behöver bytas ut när vaktmästaren gör sin årliga kontroll? (0.4)

6. (a) Hitta rätt domän för funktionen (domain of the function) $\log(\sqrt{x} - 1)$. (0.3)

(b) Är funktionen $f : R \rightarrow R^+$, definerad av $f(x) = x^2$, injektiv, surjektiv, både-och eller inget av det? (is it injective/one-one, surjective/onto, both, or neither?) (0.3)

7. För frakt med liten lastbil debiterar en speditionsfirma 12 500 kr per bil plus en viktтарiff på 600 kr per ton (1 000 kg) last, upp till maxlasten 16 ton. Kundens lastbehov ξ i ton beskrivs av frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot \frac{x}{16^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{x}{16} \right), & 0 \leq x \leq 16 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(a) Beräkna förväntat lastbehov per kund $E(\xi)$. (0.3)

(b) Låt η vara speditionsfirmans intäkt per kund. Beräkna $E(\eta)$. (0.3)

8. (a) Hitta en allmän formel utan a ("a-free") för rekursions relationen $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$, där $a_0 = 1$. (0.3)

(b) Visa, med induktion, att $5^n - 1$ är delbart med 4 för alla positiva heltal, $n = 1, 2, 3, \dots$. (0.3)

9. Antalet betalande sponsorer (backers) för ett viss projekt på Kickstarter antas vara $Po(\lambda T)$, där $\lambda = 1.6$ (nya backers per timme) och T är tiden (i timmar) som projektet legat uppe.

(a) Ange väntevärde och standardavvikelse för totalt antal backers (för godtyckligt T). (0.1)

(b) Vilken är den kortaste tidsperiod T för vilken antal backers kan normalapproximeras? (0.1)

(c) Hur många hela veckor V måste projektet vara igång för att sannolikheten att projektet har minst 1000 backers är 98 %? Motivera ev. approximationer.

Ledning: V hela veckor motsvarar tiden $T = 7 \cdot 24 \cdot V$ timmar. (0.4)

10. (a) Visa, med hjälp av en sanningstabell (truth table), att $\neg(p \wedge q)$ är samma som $\neg p \vee \neg q$. (0.3)

(b) Är följande två meningar ekvivalenta?

- Om det inte regnar, går jag ut och leker.
- Om det regnar, går jag inte ut och leker.

Om inte, förklara varför. (0.3)

Lycka till!