Del 1 - Sannolikhetsteori

Sannolikhet och händelser

- Additionssatsen: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$
- Betingad sannolikhet: $\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$
- A och B är oberoende $\iff \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$.
- Bayes sats: $\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(B \mid A)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}$
- Satsen om total sannolikhet: $\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A \mid H_i)\,\mathsf{P}(H_i)$ om $H_i \cap H_j = \emptyset$ då $i \neq j$ och $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Fördelningsfunktionen $F(x)$

- För en diskret stokastisk variabel ξ är $F(x_k) = \mathsf{P}(\xi \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} P(\xi = x_i)$, då $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, för sannolikhetsfunktion $P(\xi = x_i)$.
- För en kontinuerlig stokastisk variabel ξ är $F(x) = \mathsf{P}(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, för frekvensfunktion $f(t) = F'(t)$.

Väntevärde, Varians och Standardavvikelse:

- Väntevärde: För en stokastisk variabel ξ och en funktion $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ är:

$$\mathsf{E}(g(\xi)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)\mathsf{P}(\xi = x_i), & \xi \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt, & \xi \text{ kontinuerlig} \end{cases}$$

- Varians: $\mathsf{V}(\xi) = \mathsf{E}\left(\left(\xi - \mathsf{E}(\xi)\right)^2\right) = \mathsf{E}(\xi^2) - \mathsf{E}(\xi)^2$.
- Standardavvikelse: $\mathsf{D}(\xi) = \sqrt{V(\xi)}$
- Linjärkombination av stokastiska variabler:

$$\mathsf{E}\left(\sum_i a_i\xi_i + b\right) = \sum_i a_i \mathsf{E}(\xi_i) + b$$

$$\mathsf{V}\left(\sum_i a_i\xi_i + b\right) = \sum_i a_i^2 \mathsf{V}(\xi_i), \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \text{ ober.}$$

- Medelvärdet $\overline{\xi}$, dvs. fallet $a_i = 1/n$ och $b = 0$ från ovan, ger

$$\mathsf{E}(\overline{\xi}) = \mathsf{E}(\xi), \quad \mathsf{V}(\overline{\xi}) = \frac{\mathsf{V}(\xi)}{n}, \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \text{ ober.}$$

Linjära funktioner av stokastiska variabler

- Om ξ_1 och ξ_2 är oberoende s.v. så gäller:

$$\begin{cases} \xi_1 \in Bin(n_1, p) \\ \xi_2 \in Bin(n_2, p) \end{cases} \Rightarrow \quad \xi_1 + \xi_2 \in Bin(n_1 + n_2, p)\,.$$

$$\begin{cases} \xi_1 \in Po(\mu_1) \\ \xi_2 \in Po(\mu_2) \end{cases} \Rightarrow \quad \xi_1 + \xi_2 \in Po(\mu_1 + \mu_2)\,.$$

- Om $\xi_1 \in N(\mu_1, \sigma_1)$ och $\xi_2 \in N(\mu_2, \sigma_2)$ är oberoende och a och b konstanter är:

$$a\xi_1 + b\xi_2 \in N\left(a\mu_1 + b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}\right)$$

- För en normalfördelad s.v. $\xi \in N(\mu, \sigma)$ kan fördelningsfunktionen beräknas numeriskt med

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-(x-\mu)}{\sigma}\right),$$

där Φ är fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen, $\frac{\xi-\mu}{\sigma} \in N(0, 1)$, för vilken numeriska värden finns tabulerade.

Några icke-linjära funktioner av s.v.

Låt $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vara oberoende och likafördelade s.v. med fördelningsfunktion $F(x)$. Då gäller för:

- Minsta värde, $\eta = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, har fördelning $F_\eta(x) = 1 - (1 - F(x))^n$
- Största värde, $\omega = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, har fördelning $F_\omega(x) = F(x)^n$

Centrala gränsvärdessatsen

Om $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ är ett oberoende och likafördelat stickprov av ξ: $\mathsf{E}(\xi) = \mu, \mathsf{V}(\xi) = \sigma^2$ så är för stora n:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \underset{\approx}{\in} N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) \quad \Rightarrow \quad \overline{\xi} = \frac{1}{n}\eta \underset{\approx}{\in} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Tumregler för approximationer:

Binomial	$\rightarrow$	Normal	om $np(1-p) \geq 10$.
Poisson	$\rightarrow$	Normal	om $\mu \geq 15$.

Gauss approximationsformler:

För en funktion av stokastisk variabel, $g(\xi)$, där $\mu = \mathsf{E}(\xi)$ och $\sigma^2 = \mathsf{V}(\xi)$, kan funktionens väntevärde och varians approximeras med:

$$\mathsf{E}\left(g(\xi)\right) \approx g(\mu), \quad \mathsf{V}\left(g(\xi)\right) \approx \left[g'(\mu)\right]^2 \cdot \sigma^2.$$

Miniräknare

Funktioner för fördelningar finns med ändelserna **cdf/CD** *cumulative distribution function* (fördelningsfunktion, $F(x) = P(\xi \leq x)$, **pdf/PD** *probability density function* (sannolikhets-, $\mathsf{P}(\xi = k) = P(\xi = k)$, eller täthetsfunktion, $f(x)$), eller **inv** *inverse cdf* (dvs $x = F^{-1}(p)$). Notera att kvantil och inverse funktionen skiljer sig ($\xi > x_\alpha$ eller $\xi \leq x_p$):

kvantil: Finn x_α så att $\mathsf{P}(\xi > x_\alpha) = \alpha$.
inverse: $F^{-1}(p) = x_p$ eller finn x_p så att $\mathsf{P}(\xi \leq x_p) = p$.

Fördelningsfunktionerna beräknar ibland sannolikheter i ett intervall $a < \xi \leq b$, använd $-1 \cdot 10^{99}$ eller $1 \cdot 10^{99}$ för värdena $\pm\infty$ (en mindre exponent kan eventuellt behövas men testa att den är "tillräckligt stor", dvs inte ändrar resultatet).

För att beräkna statistik och skattningar (μ^*_{obs}, s^2, $\sum x_i^2$, etc) behöver värdena först sparas i listor.

	Texas instrument	**Casio**
$1 \cdot 10^x$	**2nd** $\rightarrow$ **EE** Ger 1Ex på räknaren.	**SHIFT** $\rightarrow$ **log** (10^x) Ger $1 * 10^x$ på räknaren.
$k!$ & $\binom{n}{k}$	**MATH** $\rightarrow$ **PROB** $\rightarrow$ **!** **MATH** $\rightarrow$ **PROB** $\rightarrow$ **nCr**	**OPTN** $\rightarrow$ **PROB** $\rightarrow$ **!** **OPTN** $\rightarrow$ **PROB** $\rightarrow$ **nCr**
Fördelningar	**DISTR (2nd VARS)** $\rightarrow$ välj lämplig fördelning **normalpdf(x, μ, σ)** eller **normalcdf(a, b, μ, σ)** **binompdf(n, p, x)** eller **binomcdf(n, p, x)** **poissonpdf(λ, x)** eller **poissoncdf(λ, x)** **normalinv(1–α, μ, σ)** för normal-kvantiler, λ_α **tinv(1–α, f)** för t-kvantiler, $t_\alpha(f)$	**OPTN** $\rightarrow$ **STAT** $\rightarrow$ **DISTR** $\rightarrow$ välj lämplig fördelning **Normal PD(x, σ, μ)** eller **Normal CD(a, b, σ, μ)** **Binomial PD(x, n, p)** eller **Binomial CD(x, n, p)** **Poisson PD(x, λ)** eller **Poisson CD(x, λ)** **Inverse Normal** för normal-kvantiler, alternativet ***Tail*** anger vilket håll som inversen ska beräknas (left=inverse eller right=kvantil). **Inverse Student-t** för t-kvantiler.
Listor	**STAT** $\rightarrow$ **EDIT** För att lägga in värden listorna **2nd** $\rightarrow$ **1 – 6** Hämta namn på listor för använding. Det går att räkna med och tilldela listor: Exempel: **2*L1–1 (STO►) L2**	**MENU** $\rightarrow$ **STAT(2)** För att lägga in värden listorna **SHIFT** $\rightarrow$ **1(List)** $\rightarrow$ **1 – 6** Ange namn på listor för använding. Det går att räkna med och tilldela listor: Exempel: **2*List 1–1** $\rightarrow$ **List 2**
Statistik	**STAT** $\rightarrow$ **CALC** $\rightarrow$ **1-Var Stats** Beräkna sammanfatttande statistik för angiven lista. Exempel: **1-Var Stats L1** **STAT** $\rightarrow$ **CALC** $\rightarrow$ **2-Var Stats** Beräkna sammanfatttande statistik för två angivna listor (beräknar t.ex. $\sum x_i y_i$ som behövs för regression och korrelation). Exempel: **2-Var Stats L1,L2** **VARS** $\rightarrow$ **Statistics** $\rightarrow$ Hämta variabler som innehåller statistik som beräknats ovan.	**OPTN** $\rightarrow$ **CALC** $\rightarrow$ **1VAR** Beräkna sammanfatttande statistik för angiven lista. **OPTN** $\rightarrow$ **CALC** $\rightarrow$ **2VAR** Beräkna sammanfatttande statistik för två angivna listor (beräknar t.ex. $\sum x_i y_i$ som behövs för regression och korrelation). **VARS** $\rightarrow$ **STAT** $\rightarrow$ Hämta variabler som innehåller statistik som beräknats ovan.

Använding av miniräknare på tentan: När miniräknaren används för beräkningar på tentan måste det tydligt framgå vad som beräknats (formler), vad resultatet är och vilka slutsatser som kan dras. Att bara repetera resultat från miniräknaren utan kommentarer utgör **INTE** väl motiverade lösningar.

Fördelningar

Fördelning			Väntevärde	Varians
Binomialfördelning, Bin(n, p)	$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$k = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Hypergeometrisk fördelning, Hyp(N, n, p)	$P(\xi = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$0 \leq k \leq Np$, $0 \leq n-k \leq N(1-p)$	np	$\dfrac{N-n}{N-1}\, np(1-p)$
Poissonfördelning, Po(λ)	$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$k = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ
Rektangelfördelning, R(a, b)	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(a-b)^2}{12}$
Exponential-fördelning, Exp(λ)	$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normalfördelning, N(μ, σ)	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2

A Tabeller

A.1 Grekiska alfabetet

A	α	alfa	N	ν	ny
B	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε, ϵ	epsilon	P	ρ, ϱ	ro
Z	ζ	zeta	Σ	ς, σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	ϑ, θ	theta	Y	υ	ypsilon
I	ι	iota	Φ	φ, ϕ	fi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	my	Ω	ω	omega

A.4 Normalfördelningen

Tabellen ger sannolikheten $\Phi(x) = P(\xi \leq x)$, där $\xi \in N(0,1)$.
För negativa x-värden använd relationen $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

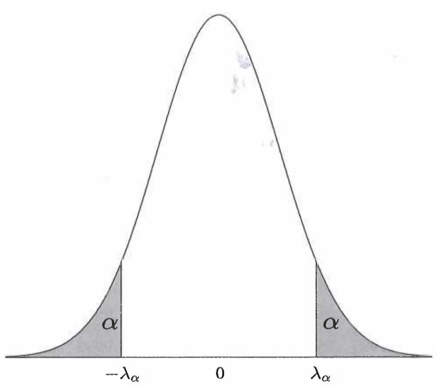
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.791	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.997	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

A.5 Normalfördelningen (forts.)

Tabellen ger det λ_α-värde för vilket $P(\xi > \lambda_\alpha) = \alpha$, där $\xi \in N(0,1)$.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
λ_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

α	0.0005	0.0001	0.00005	0.00001	5.0×10^{-6}	1.0×10^{-6}
λ_α	3.2905	3.7190	3.8906	4.2649	4.4172	4.7534



A.6 t-fördelningen

Tabellen ger det x-värde för vilket $P(\xi > x) = \alpha$, där $\xi \in t(f)$.

	α						
f	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0	0	0	0	0	0
10	1	511	9330	34 105	42 525	22 827	5880	750	45	1	0	0	0	0	0
11	1	1023	28 501	145 750	246 730	179 487	63 987	11 880	1155	55	1	0	0	0	0
12	1	2047	86 526	611 501	1 379 400	1 323 652	627 396	159 027	22 275	1705	66	1	0	0	0
13	1	4095	261 625	2 532 530	7 508 501	9 321 312	5 715 424	1 899 612	359 502	39 325	2431	78	1	0	0
14	1	8191	788 970	10 391 745	40 075 035	63 436 373	49 329 280	20 912 320	5 135 130	752 752	66 066	3367	91	1	0
15	1	16 383	2 375 101	42 355 950	210 766 920	420 693 273	408 741 333	216 627 840	67 128 490	12 662 650	1 479 478	106 470	4550	105	1

Stirlingtal av 2:a ordningen $S(n,k)$

$$S(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{för } k = 1 \text{ och } k = n, \\ S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) & \text{för } 1 < k < n, \\ 0 & \text{för } k > n. \end{cases}$$