Matematisk statistik	**Tentamen: 2024–10–29 kl 14^{00}–19^{00}**
Matematikcentrum	**FMSF30 & FMSF32**
Lunds universitet	**Matematisk statistik**

- **Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare samt utdelad formelsamling (häftad med tentamen).
- Tentamen består av 6 uppgifter om 1.0 poäng vardera, med delpoäng om minst 0.1 poäng.
- Betygsgränser: Betyg 3 (godkänt): 3.0 poäng. Betyg 4: 4.0 poäng. Betyg 5: 5.0 poäng.
- **Tips:** Läs genom hela tentamen och börja med den uppgift du anser vara lättast.
- Resultatet läggs in i Ladok senast *tisdag 19 november 2024.*
- För övriga instruktioner, se tentamensomslagets insida.

---

1. Ω: Du kastar två vanliga tärningar en gång. Beteckna händelserna A: *alla utfall där första kastet är* 3 och B: *alla utfall där summan är* 7.
   (a) Skriv upp alla utfall i utfallsrummet Ω samt beräkna $P(A)$ och $P(B)$. (0.3)
   (b) Visa att händelserna A och B är oberoende. (0.3)
   (c) Beakta händelsen C: *summan är 6*. Är även A och C oberoende? (0.4)

2. Ett bostadsområde med $n = 1000$ hushåll planeras. Låt behovet av parkeringsplatser för dessa hushåll vara $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, där antal bilar i ett vanligt hushåll, ξ_i, antas vara oberoende av andra hushåll och ha sannolikhetsfunktionen

x	0	1	2	3	för övrigt
$P(\xi = x)$	0.35	0.5	0.1	0.05	0

   (a) Vad är sannolikheten att $y = 1000$ parkeringsplatser räcker för hushållens behov? Redogör för ev. approximation. (0.5)
   (b) Hur många parkeringsplatser y bör byggas så att sannolikheten att hushållens behov täcks är 99 %? (0.5)

3. Du arbetar med produktutveckling på en slitagekomponent vars livslängd anses normalfördelad med förväntat värde $\mu = 100$ timmar med standardavvikelse $\sigma = 15$. Med optimerade subkomponenter tror du dig ha ökat livslängden till $\mu = 110$ timmar utan att standardavvikelsen förändrats. P.g.a. den långa testningscykeln tillverkar och testar du endast $n = 4$ prototyper av din förbättrade produkt, och observerar:

   $$114.6 \quad 105.7 \quad 124.8 \quad 93.6 \quad \text{(timmar)}$$

   (a) Bestäm och genomför ett test $\bar{x} > k$ så att sannolikheten att felaktigt påstå att $\mu > 100$ är högst 5 %, dvs. $P(\bar{\xi} > k \mid \mu = 100) = 0.05$. Har du fog för att påstå att du har förbättrat produkten? (0.5)
   (b) Du är övertygad om att livslängden är $\mu = 110$. Hur många prototyper hade du varit tvungen att tillverka och testa så att sannolikheten att ett test bekräftar detta är 99 %, dvs bestäm n för styrkan $P(\bar{\xi} > k \mid \mu = 110) = 0.99$. (0.5)

Var god vänd!

4. Vi vill undersöka Galtons klassiska regressionsproblem: Sambandet mellan längden hos en individ y_i och dennes förälder, x_i (av samma kön). Antag att en individs längd kan modelleras med sin förälders längd x som

$$\eta = \alpha + \beta x + \epsilon, \text{ med oberoende avvikelser } \epsilon \in N(0, \sigma).$$

Vi undersöker $n = 71$ insamlade datapar $(x_i,\ y_i)$ för studenter på LTH Campus Helsingborg, vilket visualiseras i figur 1(a). Som hjälp för skattningarna har följande kvantiteter beräknats: $\bar{x} = 176.9$, $\bar{y} = 179.5$, $S_{xx} = 7124.6$, $S_{xy} = 3747.3$, samt $S_{yy} = 5541.7$.

(a) Skatta α, β och σ. (0.3)

(b) Studera avvikelserna från linjen i figur 1(b)-1(c) och beräkna förklaringsgraden R^2. Är detta en bra modell? (0.1)

(c) Galtons hypotes är att (i) långa föräldrar får långa barn, men *inte lika långa*, samt att (ii) korta föräldrar får korta barn, men *inte lika korta*. Uttryck detta med noll- och mothypotes för β. (0.2)

(d) Genomför testet med ett 99 % konfidensintervall och besvara hypotesen. (0.4)

5. Vid inmätning med laser tillkommer ett mätfel ϵ (mm), vilken beskrivs av frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{(x-\lambda)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{k}{(x+\lambda)^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

för en parameter $\lambda > 0$ vars värde beror på vilket lasersystem som används. Bestäm konstanten k (uttrycket innehåller λ) och beräkna sedan $P(\epsilon < 0.5)$ då $\lambda = 1$. (1.0)

6. Hastigheten för en bil som passerar ett övergångsställe, ξ, antas vara s.k. *Lognormalfördelad*, med fördelningsfunktion

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right), \ x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

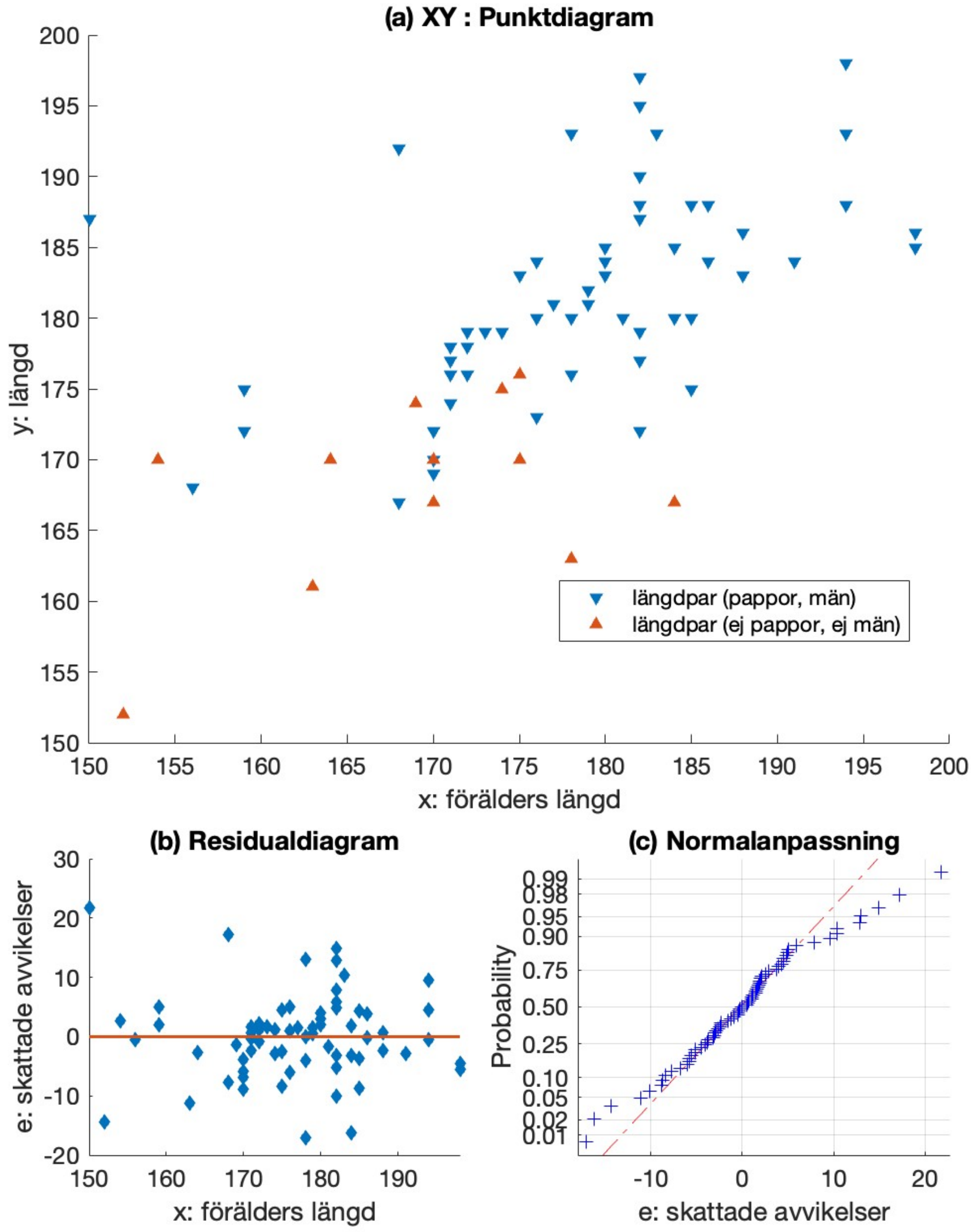
där lämpliga parametervärden på en viss 30 km/h väg är $\mu = 3.5$ och $\sigma = 0.25$, och $\Phi(\cdot)$ betecknar fördelningsfunktionen för $N(0, 1)$.

(a) Beräkna sannolikheten q att en förare förlorar körkortet vid kontroll på denna väg, dvs $q = P(\xi \geq 50)$. (0.3)

(b) En fartkamera registrerar fordonshastigheter i närheten av detta övergångsställe med radar. Låt η vara antal förare som förlorar körkortet vid kontroll av n fordon. Om fordonens hastigheter kan anses oberoende och lognormalfördelade enligt ovan, vad är fördelningen för η? *Om* du inte löst (a) kan du använda $q = 0.04$. (0.3)

(c) Vi misstänker att fartkameran missar att registrera vissa fortkörare. Under en dag uppmättes endast $x_0 = 1$ fordonshastighet över 50 km/h av totalt 75 kontrollerade fordon. Undersök p-värdet $p = P(\eta \leq x_0)$ givet att η följer fördelningen i (b). Är vår misstanke befogad? *Ledning*: Sannolikheten bör beräknas exakt, utan approximation. (0.4)

Lycka till!



Figur 1: Visualisering av datamaterial tillhörande uppgift 4.