---

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper
- På omslaget måste du skriva med bläck
- Skriv endast på ena sidan av pappret
- **Resultatet läggs in i Ladok senast onsdag 24 april 2024.**

---

1. På en ort med 30 000 invånare finns tre populära tidningar, A, B och C. Av invånarna läser 1/3 tidning A, 1/4 tidning B och 1/6 tidning C. Dessutom läser 1/6 av invånarna både tidning A och B, samt 1/12 både tidning B och C. Dock läser *ingen* både tidning A och C.

   (a) Läses tidningarna A och C oberoende av varandra? (0.4)

   (b) Hur många läser varken tidning A, B eller C? (0.6)

2. En kontinuerlig stokastisk variabel $\xi$ beskrivs av frekvensfunktionen (täthetsfunktionen)

$$f(x) = \begin{cases} c\,(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

   (a) Bestäm konstanten $c$. (0.5)

   (b) Beräkna väntevärdet för $\xi$. Om du inte löst (a) kan du använda $c$ i svaret. (0.5)

3. Naturvårdsverket övervakar en sjö som ligger nära gränsvärdet för övergödning, 100 mg/l fosfor. Myndigheten gör därför årliga kontroller och är intresserade av om fosforhalten i sjön stiger. Förra året observerades stickprovet $\xi_i \in N(\mu_1, \sigma), i = 1, \ldots, n_1$, med resultat:

$$\bar{x} = 86.6,\ s_1 = 5.4,\ n_1 = 4$$

   Detta år observerades stickprovet $\eta_i \in N(\mu_2, \sigma), i = 1, \ldots, n_2$, med resultat:

$$\bar{y} = 93.6,\ s_2 = 6.1,\ n_2 = 9$$

   (a) Formulera lämplig noll- och mothypotes för $\mu_1$ och $\mu_2$ som undersöker om fosforhalten har <u>ökat</u>. (0.2)

   (b) Genomför testet på nivån $\alpha = 0.05$ med lämpligt konfidensintervall. Besvara hypotesen och tolka resultatet. (0.8)

*Var god vänd!*

4. I sällskapsspelet Yatzy kastas fem vanliga tärningar maximalt tre gånger under en spelares omgång. Målet är att få ihop ett antal olika kombinationer under spelets alla omgångar. Du behöver just nu fyror, [::], ju fler desto bättre. Låt $\xi$ beteckna antal fyror du får vid ett kast med fem tärningar.

   (a) Vad är fördelningen för $\xi$? (0.3)

   (b) Vad är sannolikheten att du får minst tre fyror på första kastet, $P(\xi \geq 3)$? (0.3)

   (c) Du har tur och får exakt tre fyror på första kastet. Du sparar dessa och fortsätter med de övriga <u>två</u> tärningarna. Du kastar varje tärning tills du får en fyra, men maximalt två gånger. Vad är sannolikheten att du får totalt två fyror till på de återstående kasten? . (0.4)

5. Du är projektledare för ett underhållsarbete på ett ellok. En i taget ska ett antal olika komponenter kontrolleras, rengöras eller bytas ut. Tiden varje moment tar är något slumpmässigt och oberoende av de andra men kan antas ta (minuter):

   - Kontroll: $\gamma \in N(10, 2)$
   - Rengöring: $\eta \in N(22, 4)$
   - Utbyte: $\nu \in N(45, 10)$

   Totalt skall: 4 komponenter kontrolleras, 3 rengöras och 1 bytas ut. Låt den totala arbetstiden betecknas $\xi = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i + \sum_{j=1}^{3} \eta_j + \nu$.

   (a) Beräkna $E(\xi)$ och $D(\xi)$. (0.5)

   (b) Du vill planera arbetstiden så att sannolikheten hela arbetet hinns med är 99 %. Bestäm denna arbetstid $x$ så att $P(\xi > x) = 0.01$. Om du inte löst (a) kan du anta att $\xi \in N(100, 10)$. (0.5)

6. Redan i antiken visste man att jorden inte var platt! Den grekiske filosofen Eratosthenes (276-194 f.kr.) kunde mäta jordens omkrets genom att jämföra solens infallsvinkel på två olika platser. På midsommardagen i Syene, klockan 12.00, gav en hög stenpelare ingen skugga, medan samtidigt i Alexandria, $b = 800$ km bort, kunde han observera att en likadan stenspelare gav en skugga motsvarande en viss infallsvinkel. Antag att denna vinkel, $\mu$, kunde skattas $\mu^*$, både väntevärdesriktigt och med en standardavvikelse $D(\mu^*) = 1°$. Eratosthenes använde sedan följande formel för att beräkna jordens omkrets (i km):

$$\omega = g(\mu) = \frac{360b}{\mu}$$

   (a) Eratosthenes observerade vid ett tillfälle att $\mu^*_{obs} = 7°$. Använd denna observation för att skatta jordens omkrets, $\omega$. (0.3)

   (b) Antag att $E(\mu^*) \approx \mu^*_{obs}$. Använd Gauss approximationsformler för att beräkna osäkerheten i skattningen av jordens omkrets, dvs. standardavvikelsen $D(g(\mu^*))$. (0.6)

   (c) Om jorden vore platt skulle $\omega \to \infty$. Resonera med hjälp av (a) och (b) huruvida Eratosthenes kunde avfärda denna teori. (0.1)

---

Lycka till!