**Matematisk statistik**
**Matematikcentrum**
**Lunds universitet**

**Tentamen: 2023–10–27 kl $8^{00}$–$13^{00}$**
**FMSF30 & FMSF32**
**Matematisk statistik**

---

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper
- På omslaget måste du skriva med bläck
- Skriv endast på ena sidan av pappret
- **Resultatet läggs in i Ladok senast fredag 17 november 2023.**

---

1. En ovanlig sjukdom sägs drabba 0.1 % av befolkningen. Testet för att bekräfta sjukdomen visar positivt med 99% sannolikhet om du har sjukdomen, samt positivt med 0.5 % sannolikhet om du inte har sjukdomen.

   (a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald person testar positivt? (0.5)

   (b) Du testar positivt på testet. Vad är nu den betingade sannolikheten att du är sjuk? (0.5)

2. I Svenska Spels tv-sända hazardspel Lotto finns en trumma med 35 bollar numrerade från 1 till 35. Spelet börjar med att trumman börjar snurra innehållandes samtliga bollar. Sedan dras sju bollar slumpmässigt och utan återläggning. Före dragningen skall spelare gissa vilka dessa sju nummer blir, utan hänsyn till numrens ordning. Ju fler rätt desto högre blir vinsten - sju rätt ger för närvarande 1 miljon kr.

   (a) Beräkna sannolikheten $p$ att en spelare får sju rätt av sju möjliga. (0.5)

   (b) Säg att en spelare spelar en omgång Lotto i veckan; från dennes 18 års-dag fram tills sin pension vid 67 års ålder, dvs $n = 2548$ gånger. Vad är sannolikheten att hen vinner på Lotto minst en gång? Om du inte löst (a) kan du använda $p = 10^{-6}$. (0.5)

3. Anta att stickprovsmedel $\overline{\xi}$ från $n$ observationer är $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, där $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$.

   (a) Beräkna sannolikheten $P(\overline{\xi} \leq \mu + 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. (0.4)

   (b) Forsforhalten i en sjö har uppmätts fyra gånger, med resultaten [ 92.7, 110.9, 101.4, 122.9 ] mg/l. Spridningen, $\sigma = 16$, anses vara känd. Beräkna ett 95 % neråt begränsat konfidensintervall för förväntad fosforhalt, dvs. ett intervall $I_\mu = [\, a, \infty\,]$. (0.5)

   (c) En sjö anses övergödd om gränsvärdet 100 mg/l fosfor överstigs. Är det troligt att sjön i fråga är övergödd? (0.1)

*Var god vänd!*

4. I en Menti-undersökning på Campus Helsingborg bland andraårsstudenterna som studerar sannolikhetsteori besvarades frågan ”Hur många syskon har du?” på följande sätt:

| Svarsalternativ, $x =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8+ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antal svaranden, $n_x =$ | 2 | 25 | 16 | 12 | 4 | 3 | 1 | 2 | 0 | $\sum_{x=0}^{8} n_x = 65$ |

Vi vill nu använda underlaget ovan för att dra slutsatser om storleken på syskonskaror. Låt därför $\xi$ = totalt antal syskon från samma familj.

(a) Bestäm vilka utfall $\xi$ kan ha (= utfallsrummet $\Omega$). (0.2)

(b) Skatta fördelningen för $\xi$, dvs. beräkna $P(\xi = k)$, för alla $k$ i utfallsrummet. (0.3)

(c) Vad är sannolikheten att en familj bestående av 2 vuxna och deras barn får plats i en vanlig 5-sitsig bil? (0.2)

(d) Beräkna förväntat antal syskon från samma familj, $E(\xi)$. (0.3)

5. För att undersöka förväntad skillnad i densitet (kg/m$^3$) mellan träslagen furu och gran har ett antal provkroppar av varje träslag undersökts. Samtliga observationer kan antas vara normalfördelade, oberoende och ha samma standardavvikelse. Resultaten blev:

| Furu | 469 | 477 | 510 | 490 | 453 | 489 | 440 | 542 | 482 | 475 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gran | 478 | 433 | 456 | 417 | 425 | 422 | 429 | 521 | | |

Inför lämpliga beteckningar och definiera fördelningen för stickproven. Ställ upp noll- och mothypotes och testa om det föreligger skillnad i densitet mellan furu och gran, på nivån $\alpha = 0.05$. (1.0)

6. I föreläsningssalarna på Campus Helsingborg, U202 och U203, finns sammanlagt $n = 50$ taklampor. Antag att varje lampas livslängd, $\xi$, är Exponentialfördelad med väntevärde $\frac{1}{\lambda} =$ 30 000 timmar, och att lampornas livslängder är oberoende.

(a) Vaktmästaren måste hyra en skylift varje gång en lampa går sönder och behöver bytas. Vad är fördelningen för tiden tills nästa lampa går sönder, dvs. $\eta$ = kortaste livslängden bland $n$ likadana lampor. (0.7)

(b) Det har nu gått tre veckor (ca 120 timmars brinntid) sedan förra bytet och vaktmästaren har observerat att en lampa är trasig igen. Beräkna sannolikheten för vaktmästarens observation, dvs $P(\eta \leq 120)$ och kommentera resultatet. Om du inte löst (a) kan du anta $\eta \in Exp(n\lambda)$. (0.3)

---

Lycka till!