Matematisk statistik	**Tentamen: 2023–08–25 kl 8^{00}–13^{00}**
Matematikcentrum	**FMSF30 & FMSF32**
Lunds universitet	**Matematisk statistik**

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper
- På omslaget måste du skriva med bläck
- Skriv endast på ena sidan av pappret

---

1. En stokastisk variabel ξ är normalfördelad $N(\mu = 10, \sigma = 1)$.

   (a) Beräkna $\mathrm{P}(\xi \leq 10)$, $\mathrm{P}(\xi > 10)$ och $\mathrm{P}(\xi = 10)$. (0.3)

   (b) Beräkna $\mathrm{P}(8.04 \leq \xi \leq 11.96)$. (0.3)

   (c) Den stokastiska variabeln $\nu \sim N(-10, 1)$ är oberoende av ξ. Beräkna $\mathrm{P}(-1.96 \leq \xi + \nu \leq 1.96)$. (0.4)

2. I Casinospelet Roulette släpps en kula runt ett snurrande hjul indelat i 37 fack, numrerade i heltal från 0 till 36. Sannolikheten att kulan landar i något fack är lika stor för alla fack och är oberoende mellan spelen. Facken mellan 1 och 36 är växelvis röda och svarta, 18 av varje sort, och dessa är spelbara. Facket 0 är grönt, tillhör huset (Casinot) och går ej att satsa på. Landar kulan där vinner huset alla satsade pengar.

   (a) Du satsar på rött och vinner om kulan landar i ett rött fack oavsett nummer. Vad är sannolikheten att du vinner? (0.2)

   (b) Att satsa n kr på rött ger vinsten $\nu = n$ kr vid vinst, eller $\nu = -n$ kr vid förlust. Beräkna väntevärdet för ν om insatsen är $n = 100$ kr och tolka resultatet. (0.2)

   (c) Du satsar på ditt lyckonummer; primtalet 7. Vad är sannolikheten att du vinner? (0.2)

   (d) Att satsa n kr på nummer 7 ger vinsten $\omega = 35n$ kr vid vinst, eller $\omega = -n$ kr vid förlust. Beräkna väntevärdet för ω om insatsen är $n = 100$ kr och tolka resultatet. (0.2)

   (e) En skärm vid Roulettebordet visar de 20 senaste utfallen av spelet. Ditt lyckotal har inte kommit upp bland de 20 senaste utfallen. Vad är sannolikheten att du vinner om du satsar på fack 7 givet denna information? (0.2)

3. Som en del i en trafiksäkerhetsundersökning vill man jämföra reaktionsförmågan i sekunder hos åtta personer före och efter förtäring av en förutbestämd mängd alkohol. Resultatet av ett försök blev:

Person	1	2	3	4	5	6	7	8
Tid före	0.45	0.67	0.32	0.36	0.79	0.41	0.91	0.29
Tid efter	0.92	1.12	0.84	0.71	0.74	0.83	0.95	0.41

Var god vänd!

Ställ upp lämplig modell, formulera hypoteser och testa om alkoholförtäring försämrar reaktionstiden på signifikansinvån 0.05. (1.0)

4. Vid återvinning av ädelmetaller från förbrukade elbilsbatterier har följande kvantiteter av mangan återvunnits ur $n = 8$ batterier:

Batteriets vikt, x_i	420	380	660	890	400	550	670	400
Återvunnen mängd mangan, y_i	9.6	16.3	26.4	33.0	15.3	12.8	17.1	9.6

där alla kvantiteter avser kg. Vi kan ansätta följande regressionsmodell för förhållandet mellan batteriets bruttovikt och mängden mangan som kan återvinnas,

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma) \text{ ober.}$$

Ledning: $\sum_i x_i = 4370$, $\sum_i y_i = 140.1$, $\sum_i x_i^2 = 2619900$, $\sum_i x_i y_i = 85477$, samt $Q_0 = 128.9$.

(a) Skatta α, β, σ^2 och tolka dessa för tillämpningen elbilsbatterier. (0.5)

(b) Standardavvikelsen för skattningen α^* är $s\sqrt{1/n + \bar{x}/S_{xx}}$, där $s = \sqrt{(\sigma^2)^*}$. Gör ett 99 % konfidensintervall för α och tolka resultatet. (0.5)

5. En student vid LTH cyklar till Campus varje dag. Sannolikheten för allvarlig cykelolycka under en dag är $\mathrm{P}(\text{olycka}) = p$.

(a) I en population på 1000 elever uppges 38 % cykla till Campus. Under föregående år inträffade 45 allvarliga cykelolyckor inom populationen. Det är ungefär 200 studiedagar på ett år. Skatta sannolikheten p. (0.4)

Om du inte löst (a) kan du istället använda $p = 0.001$. Beräkna sannolikheten att

(b) en student under en vecka (5 dagar) råkar ut för *exakt* en olycka. (0.3)

(c) en student under studietiden (600 dagar) råkar ut för *minst* en olycka. (0.3)

6. Tre föremål har okända vikter A_1, A_2, och A_3. Vi vill ta reda på dessa vikter genom vägning på en våg med försumbart systematiskt fel och precision $D(\epsilon) = \sigma$. Du vill undersöka vilket sätt att väga föremålen som ger bäst skattning av deras vikt.

- Strategi I: Du väger de tre föremålen var för sig. Ansätt modellen $\xi = A_i + \epsilon_i$ för mätning av föremål $i = 1, 2, 3$.
- Strategi II: Du väger föremålen parvis tillsammans; 1+2, 1+3, och 2+3. Ansätt modellen $\nu_1 = A_1 + A_2 + \epsilon_1$ för vägningen av föremålen 1+2 och motsvarande för de andra vägningarna. Ledning: Föremålens vikter kan skattas med följande linjärkombinationer av vägningarna, $\xi_1 = \frac{\nu_1+\nu_2-\nu_3}{2}$, $\xi_2 = \frac{\nu_1-\nu_2+\nu_3}{2}$ och $\xi_3 = \frac{-\nu_1+\nu_2+\nu_3}{2}$ för föremål 1, 2 och 3.

(a) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för ξ_1, ξ_2 och ξ_3 under *Strategi I.* Är skattningarna väntevärdesriktiga? (0.2)

(b) Gör motsvarande för *Strategi II.* Är dessa skattningar väntevärdesriktiga? (0.6)

(c) Vilken strategi har bäst precision? (0.2)

Lycka till!