Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen: 2023–04–12 kl 8^{00}–13^{00}
FMSF30 & FMSF32
Matematisk statistik

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper
- På omslaget måste du skriva med bläck
- Skriv endast på ena sidan av pappret

---

1. En stokastisk variabel ξ är rektangelfördelad i intervallet $1 \le x \le 4$ med fördelningsfunktion $F(x)$.

   (a) Vad är $F(1)$ och $F(4)$? (0.3)

   (b) Vad är sannolikheten att fyra oberoende och likafördelade variabler $\xi_1, \ldots, \xi_4$, samtliga är mindre än 2.5. (0.4)

   (c) Efter att fyra sådana observationer gjorts, vad är sannolikheten att en femte variabel, ξ_5, nu är större än 2.5. (0.3)

2. I en konstruktion skall tio limträbalkar kapas till 2400 mm och därefter monteras ihop till en total längd på 24 m. Konstruktören jämför olika strategier för att mäta och kapa balkarna. Det antas att mätfelen är oberoende $N(0, 0.5)$ mm, och att kapfelet är försumbart. Balkarnas längd kan därför modelleras som $\gamma \sim N(2400, 0.5)$ mm. Strategi A går ut på att mäta upp och kapa den första balken γ_1, varefter man med den som referens kapar övriga balkar till exakt samma längd. Strategi B går ut på att mäta och kapa varje balk oberoende av de andra.

   (a) Strategi A ger total längd: $\gamma_A = 10\gamma_1$. Beräkna $\mathrm{E}(\gamma_A)$ och $\sqrt{\mathrm{V}(\gamma_A)}$. (0.4)

   (b) Strategi B ger total längd: $\gamma_B = \sum_{i=1}^{10} \gamma_i$. Beräkna $\mathrm{E}(\gamma_B)$ och $\sqrt{\mathrm{V}(\gamma_B)}$. (0.4)

   (c) Vilken strategi ger bäst precision i konstruktionen? (0.2)

3. En hiss misstänks ha defekt skydd mot överlast. Vid överlastning av hissen uppskattas sannolikheten att hissens huvudvajer skall fallera vara 0.001. Beteckna händelsen att *huvudvajern fallerar* som A. Hissen har även en säkerhetsvajer, som är obelastad så länge huvudvajern är hel. Sannolikheten att säkerhetsvajern skall fallera om den belastas uppskattas till 0.001. Beteckna händelsen att *säkerhetsvajern fallerar* som B.

   (a) Rita ett Venn-diagram över utfallsrummet $\Omega = \{\text{händelser vid överlast}\}$ innehållandes händelserna A och B. (0.3)

   (b) Vad är $P(A)$ och $P(B|A)$? (0.2)

   (c) Vad är sannolikheten att hissen faller, dvs. $P(A \cap B)$? (0.3)

   (d) Vad är sannolikheten att säkerhetsvajern fallerar oavsett vad som händer med huvudvajers, dvs $P(B)$? (0.2)

Var god vänd!

4. En vaktmästare har köpt in LED-lampor med förväntad livslängd på 20 000 timmar.

   (a) Hur många gånger (μ) förväntas vaktmästaren byta lampa per år? Räkna med 365.25 dagar eller 8766 timmar per standardår. (0.2)

   (b) Antal lampor som går sönder per år, ζ, antas vara Poissonfördelat med täthetssfunktionen

   $$P(\zeta = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

   och väntevärde, μ, enligt föregående uppgift. Vad är sannolikheten att vaktmästaren måste byta samma lampa minst två gånger på ett år; $p = P(\zeta \geq 2)$? (0.4)

   (c) Vaktmästaren ansvarar för totalt 15 armaturer med en lampa i varje. Alla lampor antas gå sönder oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att vaktmästaren måste byta samma lampa minst två gånger, i minst en av armaturerna? Använd p om du inte löst föregående uppgift. (0.4)

5. Två LTH-studenter vill jämföra skillnader i överkroppsstyrka hos kvinnliga och manliga studenter som tränar med vikter på gym. De testar resultat i bänkpress hos slumpmässigt valda kvinnor och män; de kommer fram till att personernas styrka kan anses normalfördelade med samma varians och följande observationer:

   $$\text{Kvinnor: } \xi \sim N(\mu_x, \sigma), \quad \bar{x} = 55,\ s_x = 15,\ n_x = 20$$
   $$\text{Män: } \nu \sim N(\mu_y, \sigma), \quad \bar{y} = 70,\ s_y = 20,\ n_y = 20$$

   De vill testa förväntad skillnad i styrka mellan män och kvinnor på nivån $\alpha = 0.05$.

   (a) Sätt upp lämplig noll- och mothypotes. (0.2)

   (b) Genomför testet med valfri metodik och dra lämplig slutsats. (0.6)

   (c) Nu vill de istället dra slutsatser på individnivå. Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald kvinna är starkare än en slumpmässigt vald man, dvs. $P(\xi - \nu > 0)$. (0.2)

6. Den maximala vindhastigheten (ω, i m/s) under en dag på Öresundsbron kan modelleras som en Weibull-fördelning med

   $$f_\omega(v) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{v}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^k}, v \geq 0, \quad F_\omega(v) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^k}, v \geq 0$$

   där lämpliga värden på parametrarna är $\lambda = 11$ och $k = 1.5$. Det kan antas att vindstyrkan är oberoende mellan olika dagar. Öresundsbron stänger helt för trafik om vindstyrkan överstiger 27 m/s.

   (a) Vad är sannolikheten p att Öresundsbron stänger pga. storm idag (dag 1)? (0.3)

   (b) Vad är sannolikheten att Öresundsbron är öppen idag men stänger pga. storm imorgon (dag 2)? Använd p om du inte har löst föregående uppgift. (0.2)

   (c) Vad är sannolikheten att Öresundsbron stänger för första gången i övermorgon (dag 3)? (0.1)

   (d) Vad är sannolikheten att Öresundsbron stänger för första gången dag n? (0.4)

SLUT!