Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen: 2024–08–30 kl 8^{00}–13^{00}
FMSF30 & FMSF32
Matematisk statistik

Lösningsförslag

---

1. Beteckna händelserna: A_i: lampa i fungerar

   (a) (0.3)

$$\begin{aligned} P(\text{alla fungerar}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   (b) (0.3)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3^c|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

   (c) Vi kan få exakt två fungerande av tre på $\binom{3}{2} = 3$ sätt. Varje sätt har samma sannolikhet som i b) oavsett ordning, ty multiplikation är kommutativ. Det ger (0.4)

$$P(\text{exakt två fungerande}) = 3\,\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2. (a) Vi utnyttjar att $f(x) = F'(x)$ och deriverar under varje delintervall i $F(x)$, vilket ger: (0.2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30-2x}{225}, & 0 \le x \le 15 \\ 0, & x \text{ för övrigt.} \end{cases}$$

   (b) (0.4)

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{15} x\,\frac{30-2x}{225}dx = \int_0^{15} \frac{30x}{225}dx - \int_0^{15} \frac{2x^2}{225}dx \\ &= \left[\frac{30x^2}{2 \cdot 225}\right]_0^{15} - \left[\frac{2x^3}{3 \cdot 225}\right]_0^{15} = \left(\frac{2 \cdot 15^3}{2 \cdot 15^2} - \frac{2 \cdot 15^3}{3 \cdot 15^2}\right) = \frac{15}{3} = 5. \end{aligned}$$

   (c) (0.4)

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{15} \frac{30x^2}{225}dx - \int_0^{15} \frac{2x^3}{225}dx \\ &= \left[\frac{30x^3}{3 \cdot 225}\right]_0^{15} - \left[\frac{2x^4}{4 \cdot 225}\right]_0^{15} = \left(\frac{2 \cdot 15^4}{3 \cdot 15^2} - \frac{2 \cdot 15^4}{4 \cdot 15^2}\right) = 15^2\left(\frac{8-6}{12}\right) = \frac{15^2}{6} \\ D(\xi) &= \sqrt{E(\xi^2) - E(\xi)^2} = 15\sqrt{\frac{1}{6} - \frac{1}{3^2}} = 15\sqrt{\frac{3-2}{3 \cdot 6}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3. (a) Denna uppgift är av typen *stickprov i par* eftersom varje förpackning har testats före och efter värmebehandling, vilket ger den parvisa relationen. Denna modell finns beskriven i formelsamlingen. Vi vill undersöka om den förväntade C-vitaminhalten har sjunkit, dvs om $\Delta = E(\xi_i - \eta_i) < 0, \forall i$. (0.3)

(b) Vi ansätter därför den *ensidiga* hypotesen (0.7)

$$H_0 : \Delta = 0$$
$$H_1 : \Delta < 0$$

Observationerna av de parvisa skillnaderna, $\zeta_i = \xi_i - \eta_i \ \forall i$, beräknas först som $z_i = y_i - x_i$ för alla $n = 8$ observationer. För dessa z_i beräknas medel $\bar{z} = -10.88$ och standardavvikelse $s = 13.31$. Eftersom vi har en ensidig hypotes och skattad standardavvikelse med $n-1 = 7$ frihetsgrader ska vi använda t-kvantilen $t_{0.05}(7) = 1.895$, (från tabell). Det ger konfidensintervallet

$$I_\Delta = \left(-\infty, \bar{z} + t_{0.05}(7)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = (-\infty, -1.95] \not\ni 0$$

Eftersom 0 inte ligger i konfidensintervallet kan vi <u>förkasta H_0</u> på nivån 0.05 och konstatera att uppvärmning påverkar C-vitaminhalten.

4. (a) Väntevärdet har samma enhet som ξ, dvs tid (veckor per stöt). Intensiteten är inversen av väntevärdet, $\lambda = 1/E(\xi)$, och därför blir enheten antal (stötar per vecka). Ur texten kan vi konstatera att $\lambda = 2$ (stötar per vecka). (0.2)

   (b) (0.3)

$$E(\eta) = E\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(\xi_i) = \frac{100}{\lambda} = 50$$
$$D(\eta) = \sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i\right)} \overset{\text{ober.}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{100} V(\xi_i)} = \left[V(\xi) \overset{\text{formels.}}{=} \frac{1}{\lambda^2}\right] = \sqrt{\frac{100}{\lambda^2}} = \frac{10}{2} = 5$$

   (c) Med normalapproximation kan vi anta att $\eta \in AsN(50, 5)$. (0.5)

$$P(\eta \leq 35) = P\left(\frac{\eta - 50}{5} \leq \frac{35-50}{5}\right) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 \quad (1)$$

5. (a) Vi beräknar medel $\bar{x} = 27.04$ för $n = 5$ observationer och kvantilen för känd $\sigma = 2.8$ och tvåsidigt konfidensintervall, $\lambda_{\alpha/2} = 1.64$. Det ger konfidensintervallet (0.4)

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [24.98, 29.10] \ \ MPa$$

   (b) Bredden av det tvåsidiga konfidensintervall är avståndet mellan ändpunkterna, vilket blir $\ell = 2\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Låt ℓ_n vara bredden av konfidensintervallet med $n = 5$ observationer och ℓ_m vara bredden av ett konfidensintervall med m okänt antal observationer. Vi söker det m så att $\ell_m/\ell_n = 1/2$, vilket ger (0.6)

$$\frac{1}{2} = \frac{\ell_m}{\ell_n} = \frac{2\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{m}}}{2\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{m}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{m} = 2\sqrt{n} \quad \Longrightarrow$$
$$m = 4n.$$

Vi behöver alltså $m - n = 4n - n = 3n = 15$ *fler* observationer.

6. (a) Vi får variansen för linjärkombinationen η lika med (0.8)

$$\begin{aligned} V(\eta) &\overset{ober.}{=} c^2 V(\xi_1) + (1-c)^2 V(\xi_2) \\ &= c^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2c\,\sigma_2^2 + \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Vi får c som minimerar $V(\eta)$ genom att beräkna den stationära punkten

$$\begin{aligned} \frac{d\,V(\eta)}{dc} &= 2c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2\,\sigma_2^2 = 0 \quad \Longrightarrow \\ c &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

vilket är variansens minimum ty $\frac{d^2 V(\eta)}{dc^2} = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) > 0$.

(b) Om $\sigma_1 = \sigma_2$ blir enligt ovan $c = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{2}$, vilket ger sökt medelvärde $\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$. (0.2)

Lycka till!