Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen: 2024–04–03 kl 8^{00}–13^{00}
FMSF30 & FMSF32
Matematisk statistik

Lösningsförslag

---

1. Beteckna händelsen A: läser tidning A, och motsvarande för B och C. Vi har då $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(C) = 1/6, P(A \cap B) = 1/6, P(B \cap C) = 1/12$, samt $P(A \cap C) = 0$.

   (a) Om A och C är oberoende gäller $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$. Dock är $0 \neq 1/3 \cdot 1/4$, alltså är händelserna inte oberoende! (0.4)

   (b) Genom att rita ett Venn-diagram kan vi övertyga oss om att (0.6)

$$\begin{aligned} P(\text{läser ej A, B eller C}) &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

2. (a) $f(x)$ är en täthetsfunktion om (1) $f(x) \geq 0\ \forall x$ och om (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Det första villkoret ger att $c \geq 0$ och det andra ger:

$$\begin{aligned} 1 &= c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\ &= c\left(1 - \frac{1}{3} + 1 + \frac{-1}{3}\right) = c \cdot \frac{4}{3} \end{aligned}$$

   Lösningen blir $c = 3/4$, vilket även uppfyller det första villkoret $c \geq 0$. (0.5)

   (b) Man kan se att $f(-x) = \frac{3}{4}(1-(-x)^2) = \frac{3}{4}(1-x^2) = f(x)$, dvs. $f(x)$ är symmetrisk runt $x = 0$. En symmetrisk fördelning har väntevärde lika med sin median, dvs. $x_{0.5} = 0$. Alltså är $E(\xi) = 0$.

   Alternativ lösning: Definitionen ger att

$$E(\xi) = \int_{-1}^{1} x\,\frac{3}{4}(x - x^2)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad (1)$$

(0.5)

3. Denna uppgift är av typen två oberoende stickprov. Vi vill undersöka om observationerna y kommer från fördelning med större väntevärde än de från x.

   (a) Vi formulerar den ensidiga hypotesen

$$\begin{matrix} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \end{matrix} \quad \text{alternativt} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0 \\ H_1 : \mu_2 - \mu_1 \geq 0 \end{matrix}$$

(0.2)

(b) Som testvariabel använder vi $\mu_2 - \mu_1$, vilket ger ökningen som positiv. Vår nollhypotes blir alltså begränsad uppåt och ett konfidensintervall skall därför vara begränsat neråt. Vi har lika varians i stickproven och får efter formelsamling

$$\bar{y} - \bar{x} = 7 \tag{2}$$
$$s_p = 5.92 \tag{3}$$
$$t_{0.05}(11) = 1.796 \tag{4}$$

vilket ger konfidensintervallet

$$I_{\mu_2-\mu_1} = \left[\bar{y} - \bar{x} - t_{0.05} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \infty\right] = [0.61, \infty] \tag{5}$$

Den sanna ökningen av väntevärdet är alltså större än 0 och vi förkastar nollhypotesen med felrisken $\alpha = 0.05$. Vi kan alltså konstatera att datan visar att en ökning har skett, om än knappt. (0.8)

4. Låt ξ beteckna antal fyror du får vid ett kast med fem tärningar. ξ kan alltså anta värdena $\xi \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (a) Varje försök (ett kast med en tärning) kan antingen lyckas (ge fyra) eller misslyckas (ge annat än fyra). Sannolikheten att ett försök lyckas är $p = 1/6$ och försöket upprepas $n = 5$ gånger. Utfallen mellan försöken är oberoende. Alltså är $\xi \in Bin(5, 1/6)$. (0.3)

   (b)

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 3) &= 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) \\ &= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 - \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= 1 - 0.4019 - 0.4019 - 0.1608 = 0.0355. \end{aligned}$$

(0.3)

   (c) Alla tärningskasten är oberoende av varandra. Vi låter F_{ij} beteckna händelsen att få en fyra vid kast $i, i = 1, 2$ och av tärning $j, j = 1, 2$. F_{ij}^c betecknar på motsvarande sätt att inte få en fyra. Har man fått en fyra vid ett kast med en tärning kastas inte denna igen. Följande fyra kombinationer och sannolikheter ger två fyror:

      i. $P(F_{11} \cap F_{12}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$
      ii. $P(F_{11} \cap F_{12}^c \cap F_{22}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
      iii. $P(F_{11}^c \cap F_{12} \cap F_{21}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$
      iv. $P(F_{11}^c \cap F_{12}^c \cap F_{21} \cap F_{22}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

   Kombinationerna ovan kan inte hända samtidigt (disjunkta) och därför adderas sannolikheterna så att $P(\text{två fyror på de återstående kasten}) = 0.0934$.

   Alternativ lösning: Låt η beteckna antal fyror med den första tärningen som kastas maximalt två gånger, $\eta \in Bin(2, 1/6)$. Låt $\nu \in Bin(2, 1/6)$ vara motsvarande för den andra tärningen. Vi söker då alla kombinationer som ger minst en fyra på vardera tärning. Alltså blir (med oberoende)

$$\begin{aligned} P(\text{två fyror på de återstående kasten}) &= P(\eta \geq 1 \cap \nu \geq 1) \\ &= (1 - P(\eta = 0))(1 - P(\nu = 0)) \\ &= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^2 = 0.0934 \end{aligned}$$

(0.4)

5. Vi har $\xi = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i + \sum_{j=1}^{3} \eta_j + \nu$.

   (a) Eftersom väntevärdet är linjärt och variansen vid oberoende också är det får vi (0.5)

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{i=1}^{4} E(\gamma_i) + \sum_{j=1}^{3} E(\eta_j) + E(\nu) \\ &= 4 \cdot 10 + 3 \cdot 22 + 45 = 151 \\ D(\xi) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4} V(\gamma_i) + \sum_{j=1}^{3} V(\eta_j) + V(\nu)} \\ &= \sqrt{4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 + 10^2} = \sqrt{164} = 12.8062. \end{aligned}$$

   (b) Vi söker 1%-kvantilen till fördelningen $\xi \in N(151, \sqrt{164})$. Vi får (0.5)

$$\begin{aligned} P(\xi \geq x) = 0.01 \quad &\Leftrightarrow \\ P\left(\frac{\xi - 151}{\sqrt{164}} \geq \frac{x - 151}{\sqrt{164}}\right) = 0.01 \quad &\Leftrightarrow \\ 1 - \Phi\left(\frac{x - 151}{\sqrt{164}}\right) = 0.01 &\Leftrightarrow \\ \frac{x - 151}{\sqrt{164}} = \lambda_{0.01} = 2.3263 &\Rightarrow \\ x = 2.3263\sqrt{164} + 151 = 180.8 \text{ (h)} \end{aligned}$$

(6)

6. Vi har $g(\mu) = \frac{360b}{\mu}$ och $g'(\mu) = -\frac{360b}{\mu^2}$. μ skattas med μ^* som har $E(\mu^*) = \mu$ och $D(\mu^*) = 1$.

   (a) Med $\mu^*_{obs} = 7°$ fås skattningen av jordens omkrets $\omega^*_{obs} = \frac{360 \cdot 800}{7} = 41143$ km. (0.3)

   (b) Från formelsamling har vi $D(g(\mu^*)) \approx \sqrt{(g'(\mu))^2 \, V(\mu^*)} = \frac{360\,b}{\mu^2} D(\mu^*)$. Med $\mu \approx \mu^*_{obs}$ fås $D(\mu^*_{obs}) = \frac{360 \cdot 800}{7^2} \cdot 1 = 5878$ km. (0.6)

   (c) Eratosthenes beräknar här jordens omkrets till ca 41 tkm med osäkerhet ca 6 tkm. Under ett antagande om approximativ normalfördelning i mätning av vinkel skulle ett 99 % uppåt begränsat konfidensintervall för jordens omkrets bli ca [0 , 55] tkm, vilket tydligt talar för att jorden inte är platt. (0.1)

Lycka till!