Lösningsförslag FMSF30/32
Tentamen 25/8-23

1) $\xi \in N(10,1)$

a $P(\xi \le 10) = P\left(\frac{\xi-10}{1} \le \frac{10-10}{1}\right) = \Phi(0) = 0.5$

$P(\xi > 10) = 1-\Phi(0) = 0.5$

$P(\xi = 10) = 0$ ξ kontinuerlig!

b $P(8.04 \le \xi \le 11.96) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) =$

$= 2\Phi(1.96) - 1 \overset{\text{tabell}}{=} \underline{\underline{0.95}}$

c $V+\xi \in N(\underbrace{10+(-10)}_{0}, \underbrace{\sqrt{1^2+1^2}}_{\sqrt{2}})$

$P(-1.96 \le \xi \le 1.96) = \Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1.96}{\sqrt{2}}\right)$

$= 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{2}}\right) - 1 \overset{\text{tabell}}{=} \underline{\underline{0.83}}$

2) a $P(\text{rött}) = \frac{18}{37} = 0.487$

b $V \in p(x) = \begin{cases} \frac{18}{37} & x = n \\ 19/37 & x = -n \\ 0 & \text{alla andra } x \end{cases}$
(vinsten)

$E(V) = n \cdot \frac{18}{37} + (-n)\cdot\frac{19}{37} = n\cdot\left(\frac{18-19}{37}\right) = -\frac{n}{37}$

Förväntad vinst vid satsning $n=100$ kr är $-\frac{100}{37} = -2.7$ kr

Tentamen 25/8-23

2) c $P(\text{talet } 7) = \frac{1}{37} = 0.027$

d $W \in p(x) = \begin{cases} \frac{1}{37} & x = 35n \\ \frac{36}{37} & x = -n \\ 0 & \text{alla andra } x \end{cases}$

$$E(W) = \frac{1}{37} \cdot 35n + \frac{36}{37} \cdot (-n) = n\left(\frac{35-36}{37}\right) = -\frac{n}{37}$$

Förv. vist vid satsning $n=100$ på '7' är $-\frac{100}{37} = -2.7$ kr

e $P(\overset{A}{\overbrace{\text{siva nästa}}} \mid \overset{B}{\overbrace{\text{inga sivor 20 spel}}}) = \frac{P(\overset{A}{\text{siva nästa}} \cap \overset{B}{\text{inga sivor 20 spel}})}{P(B)}$

oberoende mellan spel
$$= \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{1}{37} \quad (\text{som i } c)$$

3) Modell: Stickprov i par

- bilda $z_i = \text{tid före}(i) - \text{tid efter}(i)$, $i = 1 \ldots 8$
- skatta $\bar{z} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i = 0.29$

$$s = \sqrt{\frac{1}{8-1}\sum (z_i - \bar{z})^2} = 0.2199$$

- Hypotes $H_0: \Delta_0 = 0$ vs. $H_1: \Delta_0 < 0$

då $z_i \in N(\Delta, \sigma)$ skillnaden före - efter $i = 1 \ldots 8$

- Teststorhet $T = \frac{\bar{z} - \overset{=0}{\Delta_0}}{s/\sqrt{n}} \in t(n-1)$ under H_0

$$T = \cancel{3.73}\ 3.73 > t_{0.05}(7) = 1.89$$

3) eftersom $T_0 > t_{0.05}(n-1)$ förkastas H_0 på nivån 0.05
forts. dvs. Alkoholkonsumption försämrar reaktionstiden.

4) a $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \in N(0, \sigma)$ ober.

återvunnen mangan, batteriets vikt

$\alpha^*_{obs} \overset{\text{formels.}}{=} \bar{y} - \beta^*_{obs}\bar{x} = -3.48$

$\beta^*_{obs} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum_i x_i^2 - \sum_i x_i \sum_i x_i} = 0.0384$

$\sigma^*_{obs} = \sqrt{\frac{Q_0}{n-2}} = 4.63$

$\alpha^*_{obs} = -3.48$ anger hur mycket mangan som återvinns då batteriet väger $x = 0$ kg $\rightarrow$ borde vara noll

$\beta^*_{obs} = +0.0384$ hur mycket mangan som återvinns per kg batteri ($\approx 4\%$)

$\sigma^*_{obs} = 4.63$ standardavvikelsen $\pm$ från detta samband

b

$$\alpha^* \in N\Big(\alpha, \underbrace{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}}{S_{xx}}}}\Big)$$

$$s_\alpha = s \cdot \sqrt{\ldots} = 1.64$$

$$I_\alpha = \alpha^*_{obs} \pm s_\alpha t_{p/2}(n-2) = [-9.56, 2.60]$$

$p = 0.01$

Vi kan inte förkasta att $\alpha = 0$, vilket är logiskt då $x = 0$ borde ge $y = 0$ kg återvunnen mangan!

5) a $P(\text{olycka})$ (för en student under en dag)

$$p = P(\text{olycka}) = \frac{\text{antal olyckor per år}}{\text{antal studentdagar per år}} = \frac{45}{1000 \cdot 0.38 \cdot 200}$$

$$= 0.006$$

b ξ = antal olyckor under $n=5$ dagar

$\xi \in Bin(5, p)$

$$P(\xi = 1) = \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 = 0.03$$

c w = antal olycksdagar under $n = 600$ dagar

$w \in Bin(600, p)$

$$P(w \geq 1) = 1 - P(w = 0) = 1 - \binom{600}{0} p^0 (1-p)^{600}$$

$$= 1 - (1-p)^{600} = 0.30$$

6) a $\xi_i = A_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,3$

$$E(\xi_i) = A_i + E(\varepsilon_i) = A_i, \quad i = 1,2,3$$

$$D(\xi_i) = \sqrt{V(\xi_i)} = \sqrt{V(A_i + \varepsilon_i)} = \sqrt{V(\varepsilon_i)} = \sigma, \quad i = 1,2,3$$

Väntevärdesriktiga skattningar av A_1, A_2 och A_3.

b $E(\xi_1) = \frac{1}{2} E(V_1 + V_2 - V_3) = \frac{1}{2} E(A_1 + \cancel{A_2} + A_1 + \cancel{A_3} - \cancel{A_2} - \cancel{A_3} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$

$$= \frac{1}{2} E(2A_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = A_1$$

$$V(\xi_1) = \frac{1}{2^2} V(V_1 + V_2 - V_3) = \frac{1}{2^2} V(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \frac{1}{4}(V(\varepsilon_1) + V(\varepsilon_2) + (-1)^2 V(\varepsilon_3))$$

$$= \frac{1}{4}(3\sigma^2)$$

$$D(\xi_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$$

6) b

$$E(\xi_2) = \frac{1}{2}E(V_1 - V_2 + V_3) = \frac{1}{2}E(A_2 + \overbrace{A_2)}^{+\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3} = A_2$$

$$V(\xi_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{3}{4}\sigma^2$$

$$D(\xi_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$$

$$E(\xi_3) = \ldots = A_3$$

$$D(\xi_3) = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 är väntevärdesriktiga skattningar av A_1, A_2 och A_3

c

Skattaren med bäst precision är den med lägst varians.

Med strategi I är $D(\xi_i) = \sigma$

— " — II — " — $= \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma < \sigma$

$\Rightarrow$ Strategi II har bäst precision