Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

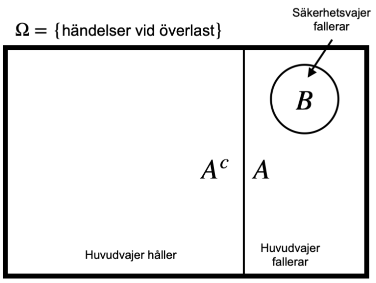
Lösning: 2023–04–12 kl 8^{00}–13^{00}
FMSF30 & FMSF32
Matematisk statistik

Lösningsförslag

---

1. För $\xi \sim R(1,4)$ gäller $F(x) = \frac{x-1}{3}, 1 \leq x \leq 4$, men denna måste inte beräknas för att lösa uppgiften.
   (a) Vad är $F(1) = 0$ och $F(4) = 1$ eftersom de motsvarar $P(\xi < x)$ för minsta respektive största värdet. (0.3)
   (b) $P(\xi_1 \leq 2.5 \cap \dots \cap \xi_4 \leq 2.5) \overset{\text{ober.}}{=} P(\xi \leq 2.5)^4 = 0.5^4$ ty medianen är $\xi = 2.5$. (0.4)
   (c) $P(\xi_5 \geq 2.5 | \xi_1 \leq 2.5 \cap \dots) = P(\xi_5 \geq 2.5) = 0.5$ då dessa är oberoende observationer. (0.3)

2. (a) Strategi A ger $E(\gamma_A) = 10E(\gamma_1) = 24$ m och $\sqrt{V(\gamma_A)} = \sqrt{10^2 V(\gamma_1)} = \sqrt{10^2 * 0.5^2} = 5$ mm. (0.4)
   (b) Strategi B ger: $E(\gamma_B) = \sum_{i=1}^{10} E(\gamma_i) = 10 * 2.4 = 24$ m och $\sqrt{V(\gamma_B)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} V(\gamma_i)} = \sqrt{10 * 0.5^2} = 1.58$ mm. (0.4)
   (c) Strategi B har minst standardavvikelse och därför högst precision. En tolkning är att oberoende fel delvis tar ut varandra istället för att samma fel förstärks. (0.2)

3. B inträffar endast om A inträffar, därför är $P(B|A^C) = 0$. Om B har inträffat så måste A också ha inträffat, alltså är $P(A|B) = 1$.
   (a) 

(0.3)
   (b) $P(A) = 0.001$ och $P(B|A) = 0.001$ enligt uppgift. (0.2)
   (c) $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = 0.001^2$ (0.3)
   (d) Liten omarbetning av Bayes sats ger $P(B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(A|B)} = 0.001^2$ (0.2)

Var god vänd!

4. (a) Förväntat antal byten per år är $\mu = \frac{8766}{20000} = 0.4383$. (0.2)
   (b) Vi kan beteckna händelsen $\{\zeta \geq 2\}$ som ett ”dubbelbyte” med sannolikheten $p = P(\zeta \geq 2) = 1 - P(\zeta \leq 1) = 1 - P(\zeta = 0) - P(\zeta = 1) = 0.0721$. (0.4)
   (c) Lösning 1:
   Vi definierar ”dubbelbyte” som en händelse H_j som inträffar i armatur j med sannolikheten p, för vaktmästarens $j = 1, \ldots, 15$ armaturer oberoende av varandra. Vi vill veta sannolikheten för H_j för minst ett j. Komplementhändelsen är att H_j inte inträffar för något j. De sökta sannolikheten kan vi uttrycka som
   $1 - P(H_1^c, H_2^c, \ldots, H_{15}^c) = 1 - P(H_1^c) \cdot P(H_2^c) \cdot \cdots \cdot P(H_{15}^c) = 1 - (1-p)^{15} = 0.675$.
   Lösning 2:
   Antal ”dubbelbyten” bland vaktmästarens 15 lampor är binomialfördelad med sannolikhet p, alltså kan vi ansätta $\eta \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.0721)$. Den sökta sannolikheten är $P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - \binom{15}{0} p^0 (1-p)^{15} = 0.675$. (0.4)

5. (a) Vi skulle kunna tänka oss både en- och tvåsidig hypotes. Läser man uppgiften ordagrant efterfrågas ”skillnad i styrka” och därför ansätter vi en tvåsidig; dvs $H_0 : \mu_x = \mu_y$ (ingen förväntad skillnad) mot $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ (positiv eller negativ förväntad skillnad). (0.2)
   (b) Testet är ”oberoende stickprov” och vi behöver först beräkna den poolade standardavvikelsen s_p. Denna beräknas som $s_p = \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}} = 17.67$. Vi skapar sedan ett konfidensintervall för förväntad skillnad $\mu_x - \mu_y$, som blir $I_{\mu_x - \mu_y} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{0.975}(n_x + n_y - 2) s_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} = -15 \pm 2.02 \cdot 17.67 \sqrt{\frac{1}{10}} = [-26.30, -3.71]$. Eftersom $0 \notin I_{\mu_x - \mu_y}$ så förkastar vi nollhypotesen att det inte skulle finnas förväntad skillnad mellan dessa män och kvinnor på nivån 0.05. (0.6)
   (c) Vi ansätter $\zeta = \xi - \nu$ och då gäller att $\zeta \sim N(\mu_z, \sigma_z)$, vilka skattas med $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = -15$ och $s_z = \sqrt{s_p + (-1)^2 s_p} = \sqrt{2} s_p = 25$. Vi får då $P(\zeta \geq 0) = 1 - P(\frac{\zeta - \mu_z}{\sigma} \leq \frac{0-(-15)}{25}) = 1 - \Phi(0.6) = 0.2743$. På individnivå är det alltså inte osannolikt att en kvinna är starkare än en man. (0.2)

6. Detta är en för-första-gången-fördelning där en händelse kan inträffa eller ej varje dag, och gör så oberoende av andra dagar, med sannolikheten $p = P(\omega \geq 27)$. Vi låter $\eta \sim \text{ffg}(p)$ vara antal dagar tills Öresundsbron stänger för första gången (ffg).
   (a) $p = P(\omega \geq 27) = 1 - F_\omega(27) = 0.0214 \stackrel{\Delta}{=} P(\eta = 1)$. (0.3)
   (b) $P(\text{ffg dag } 2) = P(\eta = 2) = p(1-p)$.
   (c) $P(\text{ffg dag } 3) = p(1-p)^2$ (0.1)
   (d) $P(\eta = n) = p(1-p)^{n-1}$ (0.4)

SLUT!