

1. a) Linjen ℓ_1 har riktningsvektor $\mathbf{v} = (2 - 1, 3 - 1, 4 - 1) = (1, 2, 3)$ som ger ekvationen $\ell_1: (x, y, z) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t)$. Linjen ℓ_2 har ekvationen $\ell_2: (x, y, z) = (-4 + 3t, 5 - t, 2 + t)$. Skärningen bestäms därför av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + t = -4 + 3s \\ 1 + 2t = 5 - s \\ 1 + 3t = 2 + s \end{cases} \iff \begin{cases} t - 3s = -5 \\ 2t + s = 4 \\ 3t - s = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{cases} t - 3s = -5 \\ 2t + s = 4 \\ 3t - s = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{t} -3s = -5 \\ 7s = 14 \textcircled{\cdot \frac{1}{7}} \\ 8s = 16 \end{cases} \xrightarrow{\leftarrow} \begin{cases} \textcircled{t} -3s = -5 \\ \textcircled{s} = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi har alltså $s = 2$ och $t = -5 + 3s = -5 + 3 \cdot 2 = 1$. Insättning av $t = 1$ i ℓ_1 :s ekvation (eller $s = 2$ i ℓ_2 :s ekvation) ger skärningspunkten $(2, 3, 4)$.

- b) Skärningen fås genom att sätta in ℓ :s ekvation i π :s ekvation

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z - 5 &= 0 \iff 3(1 + t) + 2(2 + 2t) + (3 - 2t) - 5 = 0 \\ &\iff 5 + 5t = 0 \iff t = -1. \end{aligned}$$

Insättning av $t = -1$ i ℓ :s ekvation ger då skärningspunkten $(0, 0, 5)$.

- c) Med $A: (-1, -1, 0)$, $B: (1, 1, 3)$ och $C: (1, -1, -3)$ gäller

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1 - (-1), 1 - (-1), 3 - 0) = (2, 2, 3), \\ \overrightarrow{AC} &= (1 - (-1), -1 - (-1), -3 - 0) = (2, 0, -3). \end{aligned}$$

Triangelns area ges av

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| &= \frac{1}{2} |(2, 2, 3) \times (2, 0, -3)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |(-6, 12, -4)| = |(-3, 6, -2)| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

2. a) Vi visar att A är inverterbar och beräknar inversen genom att betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = y_1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{-4} \\ \leftarrow \\ \boxed{-2} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \\
 & \begin{cases} \textcircled{x_1} + 2x_2 - 4x_3 = y_1 \\ -7x_2 + 15x_3 = -4y_1 + y_2 \\ -x_2 + 2x_3 = -2y_1 + y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{-1} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \\
 & \begin{cases} \textcircled{x_1} + 2x_2 - 4x_3 = y_1 \\ x_2 - 2x_3 = 2y_1 - y_3 \\ -7x_2 + 15x_3 = -4y_1 + y_2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{-2} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \\
 & \begin{cases} \textcircled{x_1} = -3y_1 + 2y_3 \\ \textcircled{x_2} - 2x_3 = 2y_1 - y_3 \\ x_3 = 10y_1 + y_2 - 7y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{2} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \\
 & \begin{cases} \textcircled{x_1} = -3y_1 + 2y_3 \\ \textcircled{x_2} = 22y_1 + 2y_2 - 15y_3 \\ \textcircled{x_3} = 10y_1 + y_2 - 7y_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Alltså är A inverterbar med inversen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 22 & 2 & -15 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

- b) Då X och A är inverterbara gäller

$$X^{-1}B = A \Longleftrightarrow B = XA \Longleftrightarrow BA^{-1} = X.$$

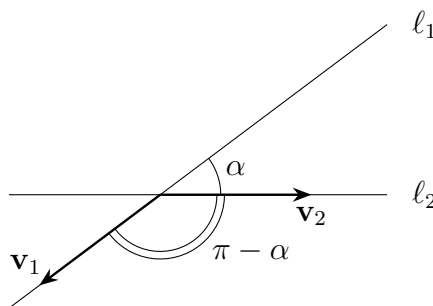
Alltså gäller

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 22 & 2 & -15 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. a) De två linjerna $\ell_1: (x, y, z) = (2 + 2t, 1 + t, 1 + 2t)$ och $\ell_2: (x, y, z) = (2 - 4t, -2 + t, -2 - t)$ har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2)$ och $\mathbf{v}_2 = (-4, 1, -1)$. Då

$$\begin{aligned}\cos([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]) &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|} = \frac{(2, 1, 2) \cdot (-4, 1, -1)}{|(2, 1, 2)| |(-4, 1, -1)|} \\ &= \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{-9}{\sqrt{9}\sqrt{18}} = -\frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

gäller $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ (dvs $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ är trubbig). Betrakta figuren



Minsta vinkeln α mellan linjerna uppfyller alltså $\pi - \alpha = \frac{3\pi}{4}$ vilket ger $\alpha = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

- b) De två planen $\pi_1: x - y - 2z = 3$ och $\pi_2: 2x - 2y - 4z = 3$ har normalvektorerna $\mathbf{n}_1 = (1, -1, -2)$ och $\mathbf{n}_2 = (2, -2, -4)$. Då $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$ är $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$ parallella. De två planen π_1 och π_2 är därför parallella.

Punkten $P_1: (3, 0, 0)$ ligger på π_1 . Minsta avståndet mellan π_1 och π_2 är därför samma som minsta avståndet mellan P_1 och π_2 . Denna avstånd ges enligt Avståndsformeln av

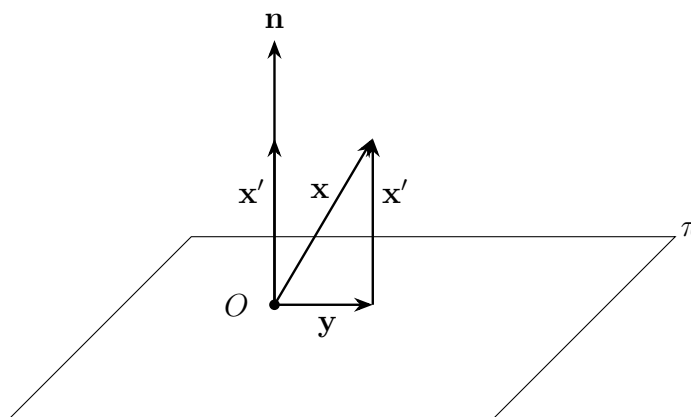
$$\frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Minsta avståndet mellan de två plan är alltså $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

4. a) Då $F(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ och $F(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$ ges avbildningsmatrisen för F av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) Planet innehåller O och har normalvektorn $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vara en godtycklig vektor i rummet och $G(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vara ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på π . Om $\mathbf{x}'$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$ gäller $\mathbf{y} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}$, vilket ger $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.



Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} = \left(\frac{(x_1, x_2, x_3) \cdot (1, -1, 2)}{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{x_1 - x_2 + 2x_3}{6} (1, -1, 2) \\ &= \frac{1}{6} (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3) \end{aligned}$$

varav

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}' \\ &= (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{6} (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3) \\ &= \frac{1}{6} (5x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 + 5x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

Avbildningsmatrisen för G är alltså

$$B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Varje vektor $\mathbf{y}$ är spegelbilden $F(\mathbf{x})$ av en entydigt bestämd vektor $\mathbf{x}$ — mer precist är $\mathbf{y}$ spegelbilden av $\mathbf{x} = F(\mathbf{y})$. Alltså är F bijektiv.

Ortogonal projektionen $G(\mathbf{x})$ på xy -planet av en vektor $\mathbf{x}$ är parallell med xy -planet. Om $\mathbf{y}$ inte är parallell med xy -planet finns alltså inte någon vektor $\mathbf{x}$ så att $G(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Därför är G inte bijektiv.

Alternativ: Determinanten av F 's avbildningsmatris är

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

Enligt Huvudsatsen är F därför bijektiv då $\det A \neq 0$.

Determinanten av G 's avbildningsmatris är

$$\begin{aligned} \det B &= \left| \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left| \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left(\frac{1}{6} \right)^3 (5 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 5 \cdot (-2)) \\ &= \left(\frac{1}{6} \right)^3 (50 - 4 - 4 - 20 - 2 - 20) \\ &= \left(\frac{1}{6} \right)^3 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Enligt Huvudsatsen är G därför inte bijektiv då $\det B = 0$.

5. Eventuella skärningspunkter fås genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} (2-a)x + (6-2a)z = 4-a \\ (2a-4)y + (2a-7)z = 4a-11 \\ (2-a)x + (6a-12)y + (6-3a)z = 4a-8 \end{cases} \quad (1)$$

Determinanten av koefficientmatrisen är:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2-a & 0 & 6-2a \\ 0 & 2a-4 & 2a-7 \\ 2-a & 6a-12 & 6-3a \end{vmatrix} &= (2-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6-2a \\ 0 & 2(a-2) & 2a-7 \\ 1 & 6(a-2) & 6-3a \end{vmatrix} \\
 &= (2-a) \cdot 2(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6-2a \\ 0 & 1 & 2a-7 \\ 1 & 3 & 6-3a \end{vmatrix} \\
 &= -2(a-2)^2 ((6-3a) + 0 + 0 \\
 &\quad -3(2a-7) - 0 - (6-2a)) \\
 &= -2(a-2)^2 (6-3a-6a+21-6+2a) \\
 &= -2(a-2)^2 (-7a+21) \\
 &= 14(a-2)^2 (a-3).
 \end{aligned}$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

$$\begin{aligned}
 \text{Skärningen av } \pi_1, \pi_2, \pi_3 \text{ är ett punkt} &\iff \\
 a \notin \{2, 3\} \text{ (dvs } a \neq 2 \text{ och } a \neq 3).
 \end{aligned}$$

Vi betraktar nu fallen $a \in \{2, 3\}$ separat. Om $a = 2$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2z & = & 2 \\ -3z & = & -3 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\frac{3}{2}} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \textcircled{2z} & = & 2 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Skärningen blir alltså planet $z = 1$.

Om $a = 3$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{rcl} -x & & = 1 \\ & 2y - z & = 1 \\ -x + 6y - 3z & = & 4 \end{array} \right. \xrightarrow{-1} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \textcircled{-x} & & = 1 \\ & 2y - z & = 1 \\ 6y - 3z & = & 3 \end{array} \right. \xrightarrow{-3} \\
 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \textcircled{-x} & & = 1 \\ \textcircled{2y} - z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Lösningen blir $z = t$, $y = \frac{1}{2}(1+z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, $x = -1$, dvs linjen $(x, y, z) = (-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t)$.

Samlad gäller alltså att planen skär varandra för alla värden på a och att skärningen är

- $a \notin \{2, 3\}$: Skärningen är en punkt.
- $a = 2$: Skärningen är planet $z = 1$.
- $a = 3$: Skärningen är linjen $(x, y, z) = (-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Låt $\mathbf{u} = (x, y, z)$. Då $\mathbf{u}$ är ortogonal mod y -axeln gäller $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = 0$ där $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$ är riktningsvektor för y -axeln. Vi har alltså

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = 0 \iff (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \iff 0 + y + 0 = 0 \iff y = 0. \quad (2)$$

Då $|\mathbf{u}| = 5\sqrt{2}$ gäller

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5\sqrt{2} \iff x^2 + y^2 + z^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50. \quad (3)$$

Volymen av parallelepipeden som spänns upp av $(1, 2, 2)$, $(2, -2, 1)$ och $\mathbf{u}$ ges av absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -2 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = -2z + 4y + 2x - y - 4z - (-4)x = 6x + 3y - 6z$$

Alltså gäller

$$6x + 3y - 6z = \pm 36 \quad (4)$$

Insättning av (2) i (4) ger

$$6x - 6z = \pm 36 \iff x - z = \pm 6 \iff x = z \pm 6 \quad (5)$$

Vi har alltså två fall: $x = z + 6$ och $x = z - 6$.

Fall 1: Insättning av $x = z + 6$ i (3) ger

$$\begin{aligned} (z + 6)^2 + z^2 &= 50 \iff z^2 + 12z + 36 + z^2 = 50 \\ &\iff 2z^2 + 12z - 14 = 0 \\ &\iff z^2 + 6z - 7 = 0. \end{aligned}$$

pq -formeln ger då $z = -3 \pm \sqrt{3^2 + 7} = -3 \pm 4$. Vi har alltså $z = -7$ vilket ger $x = -8 + 6 = -2$ eller $z = 1$ vilket ger $x = 1 + 6 = 7$. Detta fall ger alltså lösningarna $\mathbf{u} = (-2, 0, -7)$ och $\mathbf{u} = (7, 0, 1)$.

Fall 2: Insättning av $x = z - 6$ i (3) ger

$$\begin{aligned} (z - 6)^2 + z^2 &= 50 \iff z^2 - 12z + 36 + z^2 = 50 \\ &\iff 2z^2 - 12z - 14 = 0 \\ &\iff z^2 - 6z - 7 = 0. \end{aligned}$$

pq -formeln ger då $z = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 7} = 3 \pm 4$. Vi har alltså $z = -1$ vilket ger $x = -1 - 6 = -7$ eller $z = 7$ vilket ger $x = 7 - 6 = 1$. Detta fall ger alltså lösningarna $\mathbf{u} = (-7, 0, -1)$ och $\mathbf{u} = (1, 0, 7)$.

Samlad finns alltså de 4 lösningarna $\mathbf{u} = \pm(1, 0, 7)$ och $\mathbf{u} = \pm(7, 0, 1)$.