

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA LÖSNINGAR
MATEMATIK Linjär algebra, FMAA55
Helsingborg 2024-05-31

1. a) Ekvationerna för linjerna på parameterform är $\ell_1: (x, y, z) = (3t, t, 4t)$ och $\ell_2: (x, y, z) = (2 - 4t, 5 + 3t, 7 - t)$ respektive. Skärningen bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3t = 2 - 4s \\ t = 5 + 3s \\ 4t = 7 - s \end{cases} \iff \begin{cases} 3t + 4s = 2 \\ t - 3s = 5 \\ 4t + s = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} t - 3s = 5 \\ 3t + 4s = 2 \\ 4t + s = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{t} - 3s = 5 \\ 13s = -13 \\ 13s = -13 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{t} - 3s = 5 \\ \textcircled{13s} = -13 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi har alltså $s = \frac{-13}{13} = -1$ och $t = 5 + 3s = 5 + 3 \cdot (-1) = 2$. Insättning av $t = 2$ i ℓ_1 :s ekvation ger skärningspunkten $(6, 2, 8)$.

- b) Beräkning ger

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (3, 1, 4) \times (-4, 3, -1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-13, -13, 13) = -13(1, 1, -1) \end{aligned}$$

som har längd

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |-13|(1, 1, -1)| = 13\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = 13\sqrt{3}.$$

Då

$$\frac{1}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{13\sqrt{3}}(-13)(1, 1, -1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$$

finns det alltså precis två vektorer av längd 1 som är ortogonala mot både \mathbf{u} och \mathbf{v} , nämligen $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$.

c) Uppdelningen ges av $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där \mathbf{u}_1 är ortogonala projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{v} . Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \left(\frac{(3, 1, 4) \cdot (-4, 3, -1)}{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1)}{16 + 9 + 1} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{-12 + 3 - 4}{26} \right) \mathbf{v} = -\frac{13}{26} \mathbf{v} = -\frac{1}{2}(-4, 3, -1) \\ &= \frac{1}{2}(4, -3, 1) \end{aligned}$$

varav

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (3, 1, 4) - \frac{1}{2}(4, -3, 1) = \frac{1}{2}(2, 5, 7).$$

2. a) Det gäller

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff$$

$$\lambda_1(0, 1, 2, -1) + \lambda_2(1, 2, 0, 1) + \lambda_3(1, 0, -4, 3) = (0, 0, 0, 0) \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \leftarrow \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & \leftarrow \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 & \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & \leftarrow^{-2} \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \leftarrow^{-1} \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 & \leftarrow \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & \leftarrow \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \textcircled{\lambda_1} + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \leftarrow^4 \\ -4\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & \leftarrow^{-3} \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & \leftarrow \end{cases} \iff$$

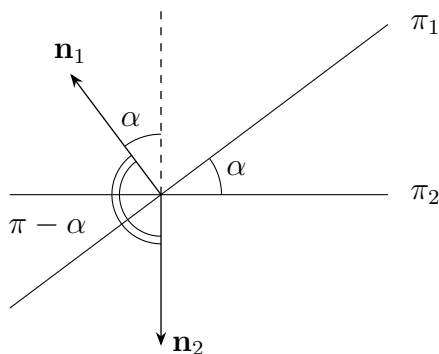
$$\begin{cases} \textcircled{\lambda_1} + 2\lambda_2 = 0 \\ \textcircled{\lambda_2} + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Det finns oändligt många lösningar $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ och därför är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt beroende.

b) Planet har normalvektorerna $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -4)$ och $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$. Då

$$\begin{aligned} \cos([\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{(1, 1, -4) \cdot (0, 1, 1)}{|(1, 1, -4)| |(0, 1, 1)|} \\ &= \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{18}\sqrt{2}} = -\frac{3}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

gäller $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ (dvs $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ är trubbig). Betrakta figuren



där vi ritat de två plan så att båda är vinkelräta mot papperets plan. Minsta vinkeln α mellan planen uppfyllar alltså $\pi - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ vilket ger $\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

c) För att ta reda på om punkten tillhör planet lösas ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 = s + t \\ 1 = 2 + 2s - 3t \\ 3 = 3 - 4s + 5t \end{cases} \iff \begin{cases} s + t = 1 \\ 2s - 3t = -1 \\ -4s + 5t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s + t = 1 \\ -5t = -3 \\ 9t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s + t = 1 \\ -5t = -3 \\ 0 = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Ekvationssystemet saknar lösning så punkten ligger *inte* i planet.

Alternativ lösning: Planet har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -4)$ och

$\mathbf{v}_2 = (1, -3, 5)$. En normalvektor är därför

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1, 2, -4) \times (1, -3, 5) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, -9, -5).\end{aligned}$$

Ekvationen är alltså $\pi: 2x + 9y + 5z + d = 0$ för något d . Då π innehåller punkten $(0, 2, 3)$ gäller $2 \cdot 0 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + d = 0$ vilket ger $d = -33$. Planet har alltså ekvationen $2x + 9y + 5z = 33$. Insättning av punkten $(1, 1, 3)$ i vänsterledet ger $2 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 26 \neq 33$, så punkten ligger *inte* i planet.

3. a) Låt F vara en $m \times n$ -matris. För att $\underbrace{E}_{6 \times 3} \underbrace{F}_{m \times n}$ ska vara definierad måste $m = 3$ och EF blir då en $6 \times n$ -matris. För att $\underbrace{EF}_{6 \times n} \underbrace{G}_{2 \times 4}$ ska vara definierad måste $n = 2$. Matrisen F måste alltså vara en 3×2 -matris och i detta fall blir EFG blir då en 6×4 -matris.

b) Omskrivning ger

$$XA = B + X \iff XA - X = B \iff XA - XI = B \iff X(A - I) = B.$$

Vi visar nedan att matrisen $A - I$ är inverterbar och beräknar inversen. Detta ger

$$X(A - I) = B \iff X = B(A - I)^{-1}$$

Beräkning ger

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi har därför $\det(A - I) = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = -6 \neq 0$ så $A - I$ är inverterbar med inversen

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Beräkning ger nu

$$X = B(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 12 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Linjen ℓ_1 går genom punkten $P_1: (1, 1, -1)$ och har riktningsvektorn

$$\mathbf{v}_1 = (4 - 1, -3 - 1, 0 - (-1)) = (3, -4, 1).$$

Linjen ℓ_2 går genom punkten $P_2: (3, -1, -3)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v}_2 = (0, 2, -1)$. Observera att $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$, så linjerna ℓ_1 och ℓ_2 är inte parallella. Låt π vara planet som innehåller ℓ_1 och är parallellt med ℓ_2 . Detta plan har normalvektorn

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (3, -4, 1) \times (0, 2, -1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, 3, 6).\end{aligned}$$

Ekvationen för π är därför $\pi: 2x + 3y + 6z + d = 0$ för något d . Då π innehåller ℓ_1 som går genom P_1 gäller $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + d = 0$, vilket ger $d = 1$. Planet har alltså ekvationen $\pi: 2x + 3y + 6z + 1 = 0$.

Avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 ges då av avståndet mellan π och P_2 . Detta avstånd fås via avståndsformeln:

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 6 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{14}{\sqrt{49}} = 2.$$

Alternativ bestämning av avståndet mellan π och P_2 : Punkten $P_1: (1, 1, -1)$ ligger på π vilket ger vektorn

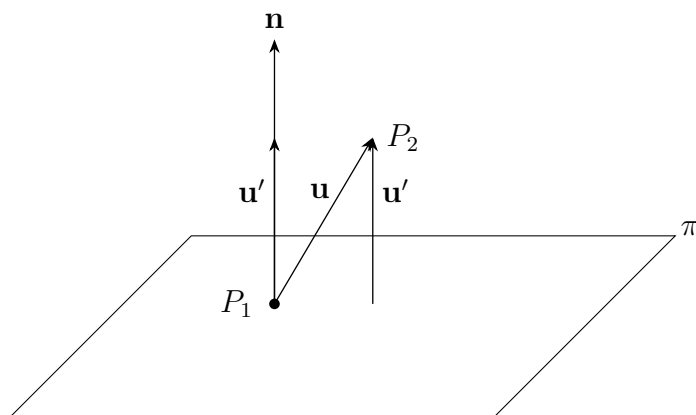
$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (3 - 1, -1 - 1, -3 - (-1)) = (2, -2, -2).$$

Projektionen av \mathbf{u} på normalvektorn \mathbf{n} blir då

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} \\ &= \left(\frac{(2, -2, -2) \cdot (2, 3, 6)}{|(2, 3, 6)|^2} \right) (2, 3, 6) \\ &= \left(\frac{4 - 6 - 12}{2^2 + 3^2 + 6^2} \right) (2, 3, 6) \\ &= \frac{-14}{49} (2, 3, 6) = -\frac{2}{7} (2, 3, 6).\end{aligned}$$

Avståndet är då

$$|\mathbf{u}'| = \left| -\frac{2}{7} (2, 3, 6) \right| = \frac{2}{7} |(2, 3, 6)| = \frac{2}{7} \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{2}{7} \sqrt{49} = 2.$$



5. a) Determinanten av A är:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{vmatrix} = 4a + 4 + 8a - 4a^2 - 4 - 8 = -4a^2 + 12a - 8 \\ = -4(a^2 - 3a + 2) = -4(a - 1)(a - 2).$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

$$A \text{ inverterbar} \iff a \notin \{1, 2\}.$$

Huvudsatsen ger också att för sådana a -värden har ekvationssystemet $AX = Y$ en entydig lösning för alla Y .

b) Det gäller

$$Y = AX_1 = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3a \\ 0 \\ 4 - 4a \end{pmatrix}$$

och

$$Y = AX_2 = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5a \\ 0 \\ 4 - 4a \end{pmatrix}$$

Alltså gäller

$$AX_1 = AX_2 \iff 2 - 3a = 6 - 5a \iff 2a = 4 \iff a = 2.$$

Insättning ger

$$Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Enligt figuren är \overrightarrow{OQ} projektionen \overrightarrow{OP} på \mathbf{v} , dvs.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{(x_1, x_2, x_3) \cdot (-2, 2, -1)}{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{-2x_1 + 2x_2 - x_3}{9} \right) (-2, 2, -1) \\ &= \frac{1}{9} (4x_1 - 4x_2 + 2x_3, -4x_1 + 4x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3).\end{aligned}$$

Figuren visar också att $\overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{PQ}$ vilket ger

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} \\ &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ &= -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} \\ &= -(x_1, x_2, x_3) + \frac{2}{9} (4x_1 - 4x_2 + 2x_3, -4x_1 + 4x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &= \frac{1}{9} (-x_1 - 8x_2 + 4x_3, -8x_1 - x_2 - 4x_3, 4x_1 - 4x_2 - 7x_3),\end{aligned}$$

varav

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9} (-x_1 - 8x_2 + 4x_3, -8x_1 - x_2 - 4x_3, 4x_1 - 4x_2 - 7x_3).$$

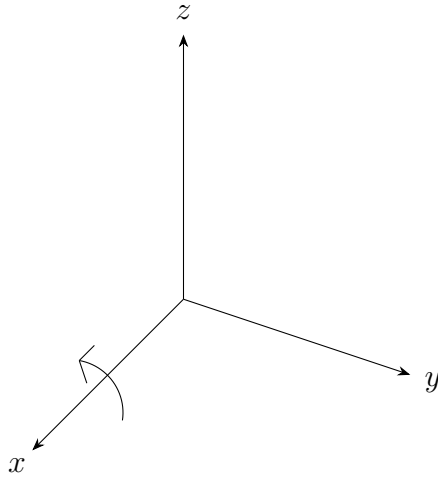
Då

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -x_1 - 8x_2 + 4x_3 \\ -8x_1 - x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

är F linjär med avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Låt $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ beteckna vridning av rummets vektorer genom vinkeln $\frac{\pi}{3}$ i positiv led runt x -axeln (sett från spetsen av x -axeln). Vi beräknar nu avbildningsmatrisen för G .



Från figuren erhålls

$$G(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$G(0, 1, 0) = \left(0, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$G(0, 0, 1) = \left(0, -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

vilket enligt Sats 8.1(ii) ger avbildningsmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

för G . Spegling åtföljt av vridning är då den sammansatta avbildningen $G \circ F$. Enligt Sats 8.4 har denna avbildningsmatrisen

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -4 - 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{7\sqrt{3}}{2} - 2 \\ 2 - 4\sqrt{3} & -2 - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{7}{2} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$