LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **MATEMATIK** **Helsingborg**

LÖSNINGAR **Linjär algebra, FMAA55** **2024-04-10**

1. a) Vinkel vid hörnet Q är $\angle PQR = \left[\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}\right]$. Beräkning ger

$$\overrightarrow{QP} = (-2-0, 0-1, 0-1) = (-2,-1,-1)$$

och

$$\overrightarrow{QR} = (1-0, 2-1, 1-1) = (1,1,0).$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}\cos\left(\left[\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}\right]\right) &= \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|\left\|\overrightarrow{QR}\right\|} = \frac{(-2,-1,-1)\cdot(1,1,0)}{\|(-2,-1,-1)\|\|(1,1,0)\|}\\ &= \frac{-2-1+0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

vilket ger $\angle PQR = \frac{5\pi}{6}$.

b) Triangelns area ges av

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}\right\| &= \tfrac{1}{2}\|(-2,-1,-1)\times(1,1,0)\|\\ &= \tfrac{1}{2}\left\|\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)\right\|\\ &= \tfrac{1}{2}\|(1,-1,-1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2. a) Beräkning ger

$$\begin{aligned}(2\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-2\mathbf{v}) &= 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - 4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= 2\|\mathbf{u}\|^2 - 3\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - 2\|\mathbf{v}\|^2\\ &= 2\cdot 2^2 - 3\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos([\mathbf{u},\mathbf{v}]) - 2\cdot 1^2\\ &= 6 - 3\cdot 2\cdot 1\cdot\cos(2\pi/3)\\ &= 6 - 6\cdot(-1/2) = 9\end{aligned}$$

b) Beräkning ger

$$\begin{aligned}
\|(2\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-2\mathbf{v})\| &= \|2\mathbf{u}\times\mathbf{u}-4\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{u}-2\mathbf{v}\times\mathbf{v}\| \\
&= \|2\cdot\mathbf{0}-4\mathbf{u}\times\mathbf{v}+(-\mathbf{u}\times\mathbf{v})-2\cdot\mathbf{0}\| \\
&= \|-5\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| \\
&= |-5|\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| \\
&= 5\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\left([\mathbf{u},\mathbf{v}]\right) \\
&= 5\cdot 2\cdot 1\cdot\sin(2\pi/3) \\
&= 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3. Vi beviser nedan att matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är inverterbara (och beräknar inverserna). Detta ger

$$\mathbf{AXB}=\mathbf{C}\iff\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}.$$

Vi har $\det\mathbf{B}=2\cdot(-2)-1\cdot(-2)=-2\neq 0$ så $\mathbf{B}$ är inverterbar med inversen

$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Vi visar nu att $\mathbf{A}$ är inverterbar och beräknar inversen.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr}
2x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & = & y_1 & & \\
-\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & & y_2 & \\
-2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & & & y_3
\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl}
-\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & & y_2 & & 2\quad -2 \\
2x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & = & y_1 & & & \\
-2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & & & y_3 &
\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr}
-x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & & y_2 & \\
 & 5x_2 & +3x_3 & = & y_1 & +2y_2 & \\
 & -\ x_2 & & = & & -2y_2 & +y_3
\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl}
-x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & & y_2 & & \\
 & -\ x_2 & & = & & -2y_2 & +y_3 & 2\quad 5 \\
 & 5x_2 & +3x_3 & = & y_1 & +2y_2 & &
\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl}
-x_1 & & +2x_3 & = & & -3y_2 & +2y_3 & \\
 & -x_2 & & = & & -2y_2 & +\ y_3 & \\
 & & 3x_3 & = & y_1 & -8y_2 & +5y_3 & -\tfrac{2}{3}
\end{array}\right. \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 & = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{7}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_3 & (\cdot -1) \\ -x_2 & = -2y_2 + y_3 & (\cdot -1) \\ 3x_3 & = y_1 - 8y_2 + 5y_3 & (\cdot \frac{1}{3}) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{2}{3}y_1 - \frac{7}{3}y_2 + \frac{4}{3}y_3 \\ x_2 & = 2y_2 - y_3 \\ x_3 & = \frac{1}{3}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{5}{3}y_3 \end{cases}$$

Alltså är $\mathbf{A}$ inverterbar med inversen

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Beräkning ger nu

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 0 & 15 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11/2 \\ -5 & -5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Eventuella skärningspunkter fås genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - ay - az = 1 \\ ax + y - z = a \\ -5ax + 5y + 11z = -10 \end{cases} \tag{1}$$

Determinanten av koefficientmatrisen är:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & 1 & -1 \\ -5a & 5 & 11 \end{vmatrix} = 11 + \left(-5a^2\right) + \left(-5a^2\right) - (-5) - \left(-11a^2\right) - 5a^2$$

$$= 16 - 4a^2 = -4\left(a^2 - 4\right) = -4(a+2)(a-2).$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

planen π_1, π_2, π_3 har precis ett skärningspunkt $\iff$

$a \notin \{-2, 2\}$ (dvs $a \neq -2$ och $a \neq 2$).

Vi betrakter nu fallen $a \in \{-2, 2\}$ separat. Om $a = -2$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = -2 \\ 10x + 5y + 11z = -10 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 5y + 3z = 0 \\ -15y - 9z = -20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 5y + 3z = 0 \\ 0 = -20 \end{cases}$$

Från sista ekvationen ser vi direkta att ekvationssystemet saknar lösning i detta fall.

Om $a = 2$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ -10x + 5y + 11z = -10 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 5y + 3z = 0 \\ -15y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 5y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Lösningen blir $z = t$, $y = \frac{-3z}{5} = -\frac{3}{5}t$,

$$x = 1 + 2y + 2z = 1 + 2\left(-\tfrac{3}{5}t\right) + 2t = 1 + \tfrac{4}{5}t$$

Samlad gäller alltså

- $a \notin \{-2, 2\}$: Precis ett skärningspunkt.
- $a = -2$: Ingen skärning.
- $a = 2$: Skärningen är linjen ℓ: $(x, y, z) = \left(1 + \frac{4}{5}t, -\frac{3}{5}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Alltså saknar planen gemensam skärning endast när $a = -2$.

5. a) Planen π_a: $ax + 4y + 7z = 3$ och π_b: $x - y + bz = 6$ är parallella precis när normalvektorerna $\mathbf{n}_a = (a, 4, 7)$ och $\mathbf{n}_b = (1, -1, b)$ är parallella.

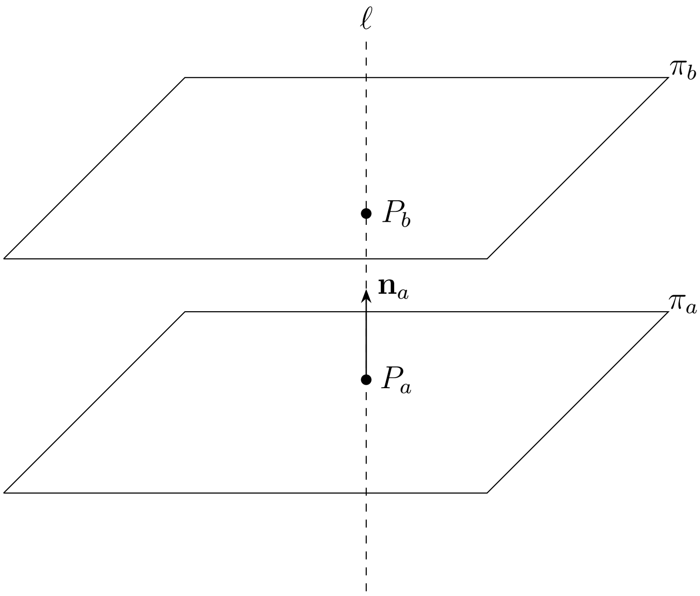
Vi har nu

$$\mathbf{n}_a \parallel \mathbf{n}_b \iff \mathbf{n}_b = k\mathbf{n}_a \iff (1,-1,b) = k(a,4,7) \iff \begin{cases} 1 = ka \\ -1 = 4k \\ b = 7k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ka = 1 \\ k = -1/4 \\ b = 7k \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ k = -1/4 \\ b = -7/4 \end{cases}$$

De två är alltså parallella precis när $(a,b) = (-4, -\frac{7}{4})$.

b) Anta nu att planen är parallella, dvs att $(a,b) = (-4, -\frac{7}{4})$. Punkten $P_a\colon (1,0,1)$ ligger på π_a ty $ax + 4y + 7z = -4 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 3$. Låt ℓ vara linjen genom P_a med riktningsvektorn $\mathbf{n}_a = (-4,4,7)$ och P_b vara skärningspunkten mellan ℓ och π_b.



Linjen ℓ har ekvationen

$$\ell\colon \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 0 + 4t \\ z = 1 + 7t \end{cases}$$

på parameterform. Skärningen P_b mellan ℓ och π_b fås genom insättning av ℓ:s ekvation i π_b:s ekvation

$$\begin{aligned}
x - y - \tfrac{7}{4}z = 6 &\iff (1-4t) - (4t) - \tfrac{7}{4}(1+7t) = 6 \\
&\iff 1 - 4t - 4t - \tfrac{7}{4} - \tfrac{49}{4}t = 6 \\
&\iff -8t - \tfrac{49}{4}t = 5 + \tfrac{7}{4} \\
&\iff -32t - 49t = 20 + 7 \\
&\iff t = \tfrac{27}{-81} = -\tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Observera att $\overrightarrow{P_aP_b} = t\mathbf{n}_a$. Minsta avståndet mellan π_a och π_b blir då

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{P_aP_b} \right\| &= \|t\mathbf{n}_a\| = \|-\tfrac{1}{3}(-4,4,7)\| = \tfrac{1}{3}\|(-4,4,7)\| \\
&= \tfrac{1}{3}\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{81} = 3.
\end{aligned}$$

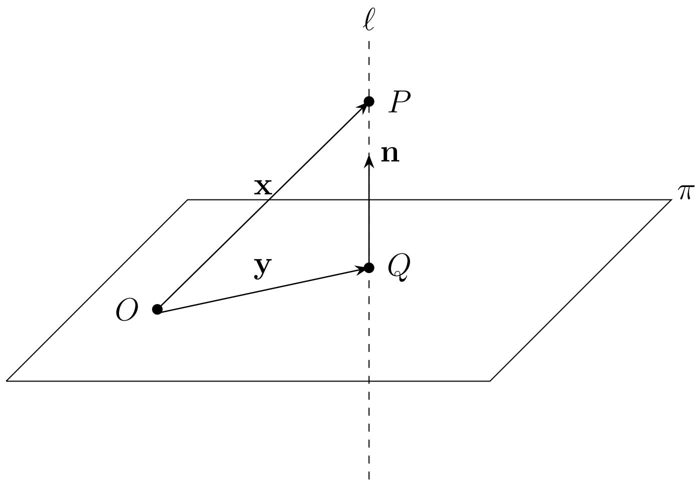
Alternativ: Insättning av $t = -\frac{1}{3}$ i ℓ:s ekvation ger

$$\begin{cases}
x = 1 - 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) & = \tfrac{7}{3} \\
y = 0 + 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) & = -\tfrac{4}{3} \\
z = 1 + 7 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) & = -\tfrac{4}{3}
\end{cases}$$

dvs $P_b\colon \left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Minsta avståndet mellan π_a och π_b blir då

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{P_aP_b} \right\| &= \left\|\left(\tfrac{7}{3} - 1, -\tfrac{4}{3} - 0, -\tfrac{4}{3} - 1\right)\right\| = \left\|\left(\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{7}{3}\right)\right\| \\
&= \|\tfrac{1}{3}(4,-4,-7)\| = \tfrac{1}{3}\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-7)^2} \\
&= \tfrac{1}{3}\sqrt{81} = 3.
\end{aligned}$$

6. **a)** Låt $\pi\colon 3x + 2y + z = 0$ och $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \overrightarrow{OP}$ vara en godtycklig vektor. Låt ℓ vara linjen genom P med riktningsvektor $\mathbf{n} = (3,2,1)$ (normalvektorn för π). Om Q betecknar skärningspunkten mellan ℓ och π ges den sökta ortogonala projektionen av $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \overrightarrow{OQ}$.



Linjen ℓ har ekvationen

$$\ell\colon \begin{cases} x = x_1 + 3t \\ y = x_2 + 2t \\ z = x_3 + t \end{cases}$$

Skärningen mellan π och ℓ erhålls genom insättning av ℓ:s ekvation i π:s ekvation

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z = 0 &\iff 3(x_1 + 3t) + 2(x_2 + 2t) + (x_3 + t) = 0 \\ &\iff 3x_1 + 9t + 2x_2 + 4t + x_3 + t = 0 \\ &\iff 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 14t = 0 \\ &\iff t = -\frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{14} \end{aligned}$$

Insättning av detta t-värde i ℓ:s ekvation ger

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3t & = x_1 + 3 \cdot \left(-\frac{3x_1+2x_2+x_3}{14}\right) & = \frac{5x_1-6x_2-3x_3}{14} \\ y_2 = x_2 + 2t & = x_2 + 2 \cdot \left(-\frac{3x_1+2x_2+x_3}{14}\right) & = \frac{-6x_1+10x_2-2x_3}{14} \\ y_3 = x_3 + t & = x_3 + \left(-\frac{3x_1+2x_2+x_3}{14}\right) & = \frac{-3x_1-2x_2+13x_3}{14} \end{cases}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Avbildningsmatrisen för $\mathbf{G}$ ges alltså av

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

b) Låt $\mathbf{A}$ vara avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ och låt $\mathbf{X}$ och $\mathbf{Y}$ vara kolonnmatriserna motsvarende vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Då $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ endast har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, har $\mathbf{AX} = \mathbf{X}$ endast lösningen $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Ekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{X}$ är ekvivalent till $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ som därför också endast har lösningen $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Används Huvudsatsen på matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ ses att $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ är inverterbar. Ekvationen $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ är därför lösbar för alla $\mathbf{Y}$. Detta är ekvivalent med att $\mathbf{AX} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ är lösbar för alla $\mathbf{Y}$. På vektorform betydar detta att $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ är lösbar för alla $\mathbf{y}$.