LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra, FMAA55**
Helsingborg **2023-08-22**

1. Matrisen **A** saknar invers då den inte är kvadratisk.

Matrisen **B** har en invers då

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 1/2023 \end{vmatrix} = 0 \cdot \tfrac{1}{2023} - \sqrt{3} \cdot (-1) = \sqrt{3} \neq 0.$$

Matrisen **C** saknar invers då

$$\begin{aligned}\det \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \cdot 4 \\ &= -15 + 4 + (-4) - (-1) - 10 - (-24) = 0.\end{aligned}$$

Determinanten av **D** kan beräknas genom successiv utveckling efter kolonn 1:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \left((-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \right) \\ &= 1 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \neq 0.\end{aligned}$$

Matrisen **D** har alltså en invers.

2. a) Med $P\colon (2,1,3)$ och $Q\colon (3,2,6)$ erhålls riktningsvektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (3-2, 2-1, 6-3) = (1,1,3)$. Linjens ekvation på parameterform är därför

$$\ell\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$$

b) Eventuell skärning finns genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2 + t_1 &= -2 - t_2 \\ 1 + t_1 &= 2 + t_2 \\ 3 + 3t_1 &= 1 + t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 + t_2 &= -4 & {}^{-1}\ {}^{-3} \\ t_1 - t_2 &= 1 & \\ 3t_1 - t_2 &= -2 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 &= -4 & \\ - 2t_2 &= 5 & {}^{-2} \\ - 4t_2 &= 10 & \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 + t_2 &= -4 \\ -2t_2 &= 5 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 &= -3/2 \\ t_2 &= -5/2. \end{cases}$$

Insättning av $t_1 = -3/2$ i ℓ:s ekvation (eller $t_2 = -5/2$ i ℓ':s ekvation) ger skärningspunkten

$$(x,y,z) = \big(2 + (-\tfrac{3}{2}), 1 + (-\tfrac{3}{2}), 3 + 3\cdot(-\tfrac{3}{2})\big) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}).$$

c) Insättning av ℓ:s ekvation i π:s ekvation ger

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z = 2 &\iff 2(2+t) - 3(1+t) + (3+3t) - 2 = 0 \\ &\iff 2 + 2t = 0 \iff t = -1. \end{aligned}$$

Skärningspunkten blir då

$$(x,y,z) = (2 + (-1), 1 + (-1), 3 + 3\cdot(-1)) = (1,0,0).$$

3. a) Med $A\colon (1,1,0)$, $B\colon (2,3,-1)$ och $C\colon (4,0,1)$ erhålls

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2-1, 3-1, -1-0) = (1,2,-1), \\ \overrightarrow{AC} &= (4-1, 0-1, 1-0) = (3,-1,1). \end{aligned}$$

Triangelns area är därför

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| &= \tfrac{1}{2}\left\|(1,2,-1)\times(3,-1,1)\right\| \\
&= \tfrac{1}{2}\left\|\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\right)\right\| \\
&= \tfrac{1}{2}\left\|(2-1,-(1-(-3)),-1-6)\right\| \\
&= \tfrac{1}{2}\left\|(1,-4,-7)\right\| \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-7)^2} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{66}.
\end{aligned}$$

b) Volymen bestäms vha. determinanten

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 3+0+(-4)-0-2-0=-3.$$

Volymen av parallellepipeden är alltså $|-3|=3$.

4. a) Planet har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1=(1,-1,-1)$ och $\mathbf{v}_2=(2,1,0)$. En normalvektor är alltså

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = (1,-1,-1)\times(2,1,0) \\
&= \left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right) \\
&= (1,-2,3).
\end{aligned}$$

Då punkten $(3,1,2)$ tillhör planet blir ekvationen på affin form för π_1 alltså

$$\pi_1\colon (x-3)-2(y-1)+3(z-2)=0 \iff \pi_1\colon x-2y+3z-7=0.$$

b) Med $y=s$ och $z=t$ erhålls ekvationen

$$\pi_2\colon \begin{cases} x = \frac{25}{3}+\frac{5}{3}s+\frac{1}{3}t & = \frac{25}{3}+\frac{5}{3}\cdot s+\frac{1}{3}\cdot t \\ y = s & = 0+1\cdot s+0\cdot t \\ z = t & = 0+0\cdot s+1\cdot t \end{cases}$$

på parameterform.

c) Gausselimination ger

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & -7 & = & 0 \\ 3x & -5y & - \ z & & = & 25 \end{cases} \iff \begin{cases} x & -2y & +3z & = & 7 \\ 3x & -5y & - \ z & = & 25 \end{cases} \quad {}^{-3}$$

$$\begin{cases} x & -2y & + \ 3z & = & 7 \\ & y & -10z & = & 4. \end{cases}$$

Vi ser att z kan väljas godtycklig, dvs. vi får parameterlösningen

$$z = t, \qquad y = 4+10t, \qquad x = 7+2y-3z = 7+2(4+10t)-3t = 15+17t.$$

Skärningen är alltså

$$\ell : \begin{cases} x = 15 + 17t \\ y = \ \ 4 + 10t \\ z = \qquad\quad t, \end{cases}$$

alltså linjen genom punkten $(15, 4, 0)$ med riktningsvektoren $(17, 10, 1)$.

5. Vektorn $(2, 1, 5)$ ligger i värdemängden för $\mathbf{F}$ precis när det finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ så att $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (2, 1, 5)$. Detta är igen ekvivalent med att ekvationssystemet

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

är lösbart. Enligt huvudsatsen finns (entydig) lösning om $\det \mathbf{A} \neq 0$. Fallet $\det \mathbf{A} = 0$ kräver sedan särskilt undersökning.

Determinanten blir

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & a & 4 \end{vmatrix} = -4a + 8 + 2a - 2a^2 - 8 - (-4)$$
$$= -2a^2 - 2a + 4 = -2(a^2 + a - 2).$$

Alltså gäller

$$\det \mathbf{A} = 0 \iff a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$
$$\iff a = -2 \text{ eller } a = 1.$$

Om $a \notin \{-2, 1\}$ ligger $(2, 1, 5)$ alltså i värdemängden för $\mathbf{F}$. För $a = -2$ och $a = 1$ kontrolleras direkt om ekvationssystemet (1) är lösbart:

För $a = -2$ erhålls

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} -2x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & = & 2 & {\scriptstyle 1}\ {\scriptstyle 2} \\ 2x_1 & -\ x_2 & +2x_3 & = & 1 & \\ 4x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 5 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} -2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & = & 2 & \\ & & 3x_3 & = & 3 & {\scriptstyle -2} \\ & & 6x_3 & = & 9 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & = & 2 \\ & & 3x_3 & = & 3 \\ & & 0 & = & 3 \end{array}\right.$$

Systemet är alltså inte lösbart och $(2, 1, 5)$ ligger därmed inte i värdemängden for $\mathbf{F}$ om $a = -2$.

För $a = 1$ erhålls

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +x_2 & +\ x_3 & = & 2 & {\scriptstyle -2}\ {\scriptstyle -4} \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 & \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 5 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +\ x_2 & +x_3 & = & 2 & \\ & -3x_2 & & = & -3 & {\scriptstyle -1} \\ & -3x_2 & & = & -3 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +\ x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & -3x_2 & & = & -3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Systemet är alltså lösbart och $(2, 1, 5)$ ligger därmed i värdemängden for $\mathbf{F}$ om $a = -2$.

Samlad gäller alltså att $(2, 1, 5)$ ligger i värdemängden för $\mathbf{F}$ för $a \notin \{-2, 1\}$ och för $a = 1$ men inte för $a = -2$, dvs.

$$(2, 1, 5) \text{ ligger i värdemängden för } \mathbf{F} \iff a \neq -2.$$

6. Vi använder följande beteckningar: Låt $P_1\colon (-2, 1, 1)$ vara den givna punkten på ℓ_1 och $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ vara riktningsvektorn för ℓ_1. På samma sätt betecknar $P_2\colon (2, 2, 1)$ den givna punkten på ℓ_2 och $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ riktningsvektorn för ℓ_2. Låt ℓ vara den sökta linjen och låt skärningspunkten med ℓ_1 och ℓ_2 vara Q_1 och Q_2 respektiva. Låt $\mathbf{v}$ vara en riktningsvektor för ℓ.

Observera att $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$ så linjerna ℓ_1 och ℓ_2 är inte parallella. Det finns därför en entydig bestämd linje ℓ som skär ℓ_1 och ℓ_2 under rät vinkel.

Lösning 1: Rikningsvektorn $\mathbf{v}$ måste vara ortogonal mot $\mathbf{v}_1$ då ℓ skär ℓ_1 under rät vinkel. På samma sätt ses att $\mathbf{v}$ måste vara ortogonal mot $\mathbf{v}_2$. Då

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (1,0,1) \times (0,1,1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1,-1,1)\end{aligned}$$

är $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1,1,-1)$ en riktningsvektor för ℓ. Då ℓ och ℓ_1 skär varandra ligger dessa två linjerna i ett gemensamt plan π_1. Detta planet har riktningsvektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_1$. Planet π_1 har alltså normalvektorn

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{v}_1 &= (1,1,-1) \times (1,0,1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (1,-2,-1).\end{aligned}$$

Punkten P_1 ligger på ℓ_1 och därmed också på π_1 och π_1 har därför ekvationen

$$\begin{aligned}&\pi_1\colon 1 \cdot (x-(-2)) + (-2) \cdot (y-1) + (-1) \cdot (z-1) = 0 \\ &\qquad \iff \pi_1\colon x - 2y - z = -5.\end{aligned}$$

Skärningen mellan ℓ och ℓ_2 är samma som skärningen mellan π_1 och ℓ_2. Denna bestäms genom att insättning av ℓ_2:s ekvation i ekvationen för π_1:

$$\begin{aligned}&x - 2y - z = -5 \iff 2 - 2(2+t) - (1+t) = -5 \\ &\qquad \iff -3 - 3t = -5 \iff t = {}^2\!/_3.\end{aligned}$$

Insättning av t i ℓ_2:s ekvation ger då skärningen $Q_2\colon (2, {}^8\!/_3, {}^5\!/_3)$ som ligger på ℓ. Sökta linjen är alltså

$$\ell\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{8}{3} + t \\ z = \frac{5}{3} - t. \end{cases}$$

Lösning 2: Punkten Q_1 måste ha koordinaterna $Q_1\colon (-2+t_1, 1, 1+t_1)$ för något t_1. På samma sätt gäller $Q_2\colon (2, 2+t_2, 1+t_2)$ för något t_2. Vektorn

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \overrightarrow{Q_1Q_2} = (2-(-2+t_1), 2+t_2-1, 1+t_2-(1+t_1)) \\ &= (4-t_1, 1+t_2, -t_1+t_2)\end{aligned}$$

är parallell med ℓ och därför ortogonal mot $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Vi har därför

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1 &\iff \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 = 0 \iff (4-t_1, 1+t_2, -t_1+t_2)\cdot(1,0,1) = 0 \\ &\iff 4-t_1+(-t_1)+t_2 = 0 \iff -2t_1+t_2 = -4,\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2 &\iff \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 = 0 \iff (4-t_1, 1+t_2, -t_1+t_2)\cdot(0,1,1) = 0 \\ &\iff 1+t_2+(-t_1)+t_2 = 0 \iff -t_1+2t_2 = -1.\end{aligned}$$

Vi löser nu ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2t_1 + t_2 = -4 & \\ -t_1 + 2t_2 = -1 & \end{cases} \quad {\scriptstyle -\frac{1}{2}} \iff \begin{cases} -2t_1 + t_2 = -4 \\ \frac{3}{2}t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1 = 7/3 \\ t_2 = 2/3. \end{cases}$$

Insättning ger $Q_1\colon \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{10}{3}\right)$ och $\mathbf{v} = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) \parallel (1, 1, -1)$. Linjens ekvation är alltså

$$\ell\colon \begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = 1 + t \\ z = \frac{10}{3} - t. \end{cases}$$