LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
Linjär algebra, FMAA55
2023-06-02

1. a) Skärningen finns genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0+\ t_1 = 1+2t_2 \\ 1-\ t_1 = -1-\ t_2 \\ 3-2t_1 = -1-2t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1-2t_2 = 1 \\ -\ t_1+\ t_2 = -2 \\ -2t_1+2t_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1-2t_2 = 1 \\ -\ t_2 = -1 \\ -\ 2t_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1-2t_2 = 1 \\ -\ t_2 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Insättning av $t_1 = 3$ i ℓ_1:s ekvation (eller $t_2 = 1$ i ℓ_2:s ekvation) ger skärningspunkten $(x, y, z) = (0+3, 1-3, 3-2\cdot 3) = (3, -2, -3)$.

b) Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, -1, -2)$ och $\mathbf{v}_2 = (2, -1, -2)$ respektiva. Dessa är inte parallella och fungerar därför som riktningsvektorer för det sökta planet som alltså har normalvektorn

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (1, -1, -2) \times (2, -1, -2) \\ &= \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, -2, 1). \end{aligned}$$

Då punkten $(0, 1, 3)$ tillhör ℓ_1 och därför också planet blir ekvationen för planet alltså

$$\begin{aligned} 0\cdot(x-0) + (-2)\cdot(y-1) + 1\cdot(z-3) = 0 &\iff -2y+z-1 = 0 \\ &\iff 2y-z+1 = 0. \end{aligned}$$

c) Linjen ℓ_1 har riktningsvektorn $\mathbf{v}_1 = (1, -1, -2)$ och planet π har normalvektorn $\mathbf{n} = (0, 1, 1)$. Vinkeln $[\mathbf{v}_1, \mathbf{n}]$ ges av

$$\begin{aligned} \cos([\mathbf{v}_1, \mathbf{n}]) &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{(1, -1, -2)\cdot(0, 1, 1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} \\ &= \frac{0+(-1)+(-2)}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{0+1+1}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Detta ger $[\mathbf{v}_1, \mathbf{n}] = \frac{5\pi}{6}$. Minsta vinkeln mellan ℓ_1 och $\mathbf{n}$ blir därför $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Minsta vinkeln mellan ℓ_1 och planet är därför $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

2. **a)** Beräkning ger

$$\mathbf{AX} + \mathbf{C} = \mathbf{AXB} \iff \mathbf{C} = \mathbf{AXB} - \mathbf{AXI} = \mathbf{AX}(\mathbf{B} - \mathbf{I}).$$

Vi beviser nedan att matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B} - \mathbf{I}$ är inverterbara (och beräknar inverserna). Detta ger

$$\mathbf{AX}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \mathbf{C} \iff \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\,(\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1}.$$

Vi har $\det \mathbf{A} = -1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = -2 \neq 0$ så $\mathbf{A}$ är inverterbar med inversen

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då $\mathbf{B} - \mathbf{I} = \left(\begin{smallmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -1 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ gäller $\det(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = (-7) \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -1 \neq 0$. Alltså är $\mathbf{B} - \mathbf{I}$ inverterbar med inversen

$$(\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Beräkning ger nu

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\,(\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Vi har

$$\lambda_1(1, 2, -1, -2, 4) + \lambda_2(6, 1, 5, 3, 2) + \lambda_3(4, -3, 7, 7, -6) = \mathbf{0} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} \lambda_1 & +6\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 & \scriptstyle -2 \quad 1 \quad 2 \quad -4 \\ 2\lambda_1 & +\ \lambda_2 & -3\lambda_3 & = & 0 & \\ -\ \lambda_1 & +5\lambda_2 & +7\lambda_3 & = & 0 & \\ -2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +7\lambda_3 & = & 0 & \\ 4\lambda_1 & +2\lambda_2 & -6\lambda_3 & = & 0 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} \lambda_1 & +\ 6\lambda_2 & +\ 4\lambda_3 & = & 0 & \\ & -11\lambda_2 & -11\lambda_3 & = & 0 & \scriptstyle 1 \quad \frac{15}{11} \quad -2 \\ & 11\lambda_2 & +11\lambda_3 & = & 0 & \\ & 15\lambda_2 & +15\lambda_3 & = & 0 & \\ & -22\lambda_2 & -22\lambda_3 & = & 0 & \end{array}\right. \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & + 6\lambda_2 & + 4\lambda_3 & = & 0 \\ & -11\lambda_2 & -11\lambda_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Vi får en parameterlösning $((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2t, -t, t),\ t \in \mathbb{R})$ så vektorerna är linjärt beroende.

3. a) Då $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (0-(-1), 4-(-1), 1-0) = (1,5,1)$ och $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = (1-(-1), 0-(-1), -1-0) = (2,1,-1)$ inte är parallella ligger P_1, P_2 och P_3 i ett entydigt bestämd plan π. Detta planet har normalvektorn

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1,5,1) \times (2,1,-1) &= \left(\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-6, 3, -9). \end{aligned}$$

Då $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-6,3,-9) = -3(2,-1,3)$ blir planets ekvation

$$\pi\colon 2\,(x-(-1)) - 1\,(y-(-1)) + 3(z-0) = 0 \iff \pi\colon 2x - y + 3z + 1 = 0.$$

Insättning av $P_4\colon (1,-3,-2)$ ger

$$2 \cdot 1 - (-3) + 3 \cdot (-2) + 1 = 2 + 3 - 6 + 1 = 0,$$

dvs. P_4 ligger i detta planet. Alltså ligger alla 4 punkterna i samma plan.

Alternativ lösning: Beräkning ger vektorerna

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= (0-(-1), 4-(-1), 1-0) = (1,5,1), \\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (1-(-1), 0-(-1), -1-0) = (2,1,-1), \\ \overrightarrow{P_1P_4} &= (1-(-1), (-3)-(-1), (-2)-0) = (2,-2,-2). \end{aligned}$$

Determinanten av matrisen som har dessa vektorerna som kolonner är

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot (-1) \\ &\quad - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ &= -2 + (-4) + (-10) - 2 - (-20) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Vektorerna $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ och $\overrightarrow{P_1P_4}$ är alltså linjärt beroende. Punkterna P_1, P_2, P_3 och P_4 ligger därför i samma plan.

b) Linjen ℓ går genom punkten $P_0\colon (-2,1,3)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1,5,7)$. Beräkning ger

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-1-(-2), -1-1, 0-3) = (1,-2,-3).$$

Från figuren nedan erhålls att $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_0Q}$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Projektionsformeln ger nu

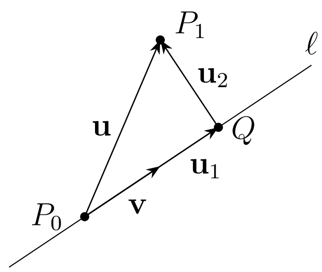
$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{(1,-2,-3)\cdot(1,5,7)}{\|(1,5,7)\|^2}\right)(1,5,7)\\
&= \left(\frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 5 + (-3)\cdot 7}{1^2+5^2+7^2}\right)(1,5,7)\\
&= \tfrac{-30}{75}(1,5,7) = -\tfrac{2}{5}(1,5,7).
\end{aligned}$$

Herav erhålls

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \iff\\
&\qquad\qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (1,-2,-3) - \left(-\tfrac{2}{5}\right)(1,5,7) = \tfrac{1}{5}(7,0,-1).
\end{aligned}$$

Minsta avståndet från P_1 till ℓ ges då av

$$\begin{aligned}
\|P_1Q\| &= \|\mathbf{u}_2\| = \|\tfrac{1}{5}(7,0,-1)\| = \tfrac{1}{5}\|(7,0,-1)\| = \tfrac{1}{5}\sqrt{7^2+0^2+1^2}\\
&= \tfrac{1}{5}\sqrt{49+0+1} = \tfrac{1}{5}\sqrt{50} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$



4. Enligt definitionen utgör $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ en ortonormeret bas i $\mathbb{R}^3$ om

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = \|\mathbf{u}_3\| = 1 \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3.$$

Planet $\pi\colon x - y + z + 2023 = 0$ har normalvektorn $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ så $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{n}$. Då $\mathbf{u}_1$ är en enhetsvektor normerar vi $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n} = \frac{1}{\|(1,-1,1)\|}(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}(1,-1,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1).
\end{aligned}$$

Linjen $\ell\colon (x, y, z) = (34 + t, 37 + t, -45 + 3t)$ har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$ så $\mathbf{u}_3 \perp \mathbf{v}$. Dessutom gäller $\mathbf{u}_3 \perp \mathbf{u}_1$ då $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ är en ON-bas. Alltså är $\mathbf{u}_3$ parallell med

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{u}_1 &= (1,1,3) \times \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - (-3), -(1-3), -1-1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(4,2,-2) = \frac{2}{\sqrt{3}}(2,1,-1).
\end{aligned}$$

Alltså gäller $\mathbf{u}_3 \parallel (2, 1, -1)$ och vi normerar

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_3 &= \frac{1}{\|(2,1,-1)\|}(2,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}(2,1,-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1).
\end{aligned}$$

Observera att $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$ är en enhetsvektor då $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_3$ är ortogonala enhetsvektorer. Dessutom är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$ positivt orienterad vilket ger att $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_3$ är negativt orienterad vilket igen ger att $\mathbf{u}_1$, $-\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_3$ är positivt orienterad. Alltså gäller $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1$. Beräkning ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \times \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}}\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(1-1, -\left(2-(-1)\right), -2-1\right) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}(0,-3,-3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1).
\end{aligned}$$

Ett möjligt val av positivt orienterad ON-bas är alltså

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1).$$

5. Standard lösning: Om $\mathbf{A}$ betecknar avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ gäller

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Dessa tre ekvationer kan skrivas som en matrisekvation

$$\mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 0 & 2\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\1 & 3 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

Vi visar nu att $\mathbf{B}$ är inverterbar och beräknar inversen.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & -\,x_2 & +2x_3 & = & y_1 & & \\ x_1 & & +2x_3 & = & & y_2 & \\ x_1 & +3x_2 & +\,x_3 & = & & & y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & y_1 & & \\ & x_2 & & = & -y_1 & +y_2 & \\ & 4x_2 & -\,x_3 & = & -y_1 & & +y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & y_1 & & \\ & x_2 & & = & -y_1 & +\,y_2 & \\ & & -\,x_3 & = & 3y_1 & -4y_2 & +y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & -x_2 & & = & 7y_1 & -8y_2 & +2y_3 \\ & x_2 & & = & -y_1 & +\,y_2 & \\ & & -x_3 & = & 3y_1 & -4y_2 & +\,y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & & & = & 6y_1 & -7y_2 & +2y_3 & \\ & x_2 & & = & -y_1 & +\,y_2 & & \\ & & -x_3 & = & 3y_1 & -4y_2 & +\,y_3 & (\cdot -1) \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & & & = & 6y_1 & -7y_2 & +2y_3 \\ & x_2 & & = & -\,y_1 & +\,y_2 & \\ & & x_3 & = & -3y_1 & +4y_2 & -\,y_3 \end{array}\right.$$

Alltså är $\mathbf{B}$ inverterbar med inversen

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Då $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ gäller

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -4 \\ 6 & -8 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi viser härnäst att $\mathbf{A}$ är inverterbar och beräknar inversen.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -9x_1 & +12x_2 & -4x_3 & = & y_1 \qquad \tfrac{2}{3}\quad -\tfrac{2}{9} \\ 6x_1 & -\ 8x_2 & +3x_3 & = & \qquad y_2 \\ -2x_1 & +\ 3x_2 & -\ x_3 & = & \qquad\qquad y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -9x_1 & +12x_2 & -4x_3 & = & y_1 \\ & & \tfrac{1}{3}x_3 & = & \tfrac{2}{3}y_1 \ +y_2 \\ & \tfrac{1}{3}x_2 & -\tfrac{1}{9}x_3 & = & -\tfrac{2}{9}y_1 \qquad +y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -9x_1 & +12x_2 & -4x_3 & = & y_1 \\ & \tfrac{1}{3}x_2 & -\tfrac{1}{9}x_3 & = & -\tfrac{2}{9}y_1 \qquad +y_3 \\ & & \tfrac{1}{3}x_3 & = & \tfrac{2}{3}y_1 \ +y_2 \qquad \tfrac{1}{3}\quad 12 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -9x_1 & +12x_2 & & = & 9y_1 \ +12y_2 \\ & \tfrac{1}{3}x_2 & & = & \tfrac{1}{3}y_2 \ +y_3 \qquad -36 \\ & & \tfrac{1}{3}x_3 & = & \tfrac{2}{3}y_1 \ +\ y_2 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} -9x_1 & & & = & 9y_1 \qquad -36y_3 & (\cdot -\tfrac{1}{9}) \\ & \tfrac{1}{3}x_2 & & = & \tfrac{1}{3}y_2 \ +\ y_3 & (\cdot 3) \\ & & \tfrac{1}{3}x_3 & = & \tfrac{2}{3}y_1 \ +y_2 & (\cdot 3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & -y_1 \qquad +4y_3 \\ & x_2 & & = & \qquad y_2 \ +3y_3 \\ & & x_3 & = & 2y_1 \ +3y_2 \end{array}\right.$$

Alltså är $\mathbf{A}$ inverterbar med inversen

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Då $\mathbf{A}$ är inverterbar ger Huvudsatsen att kolonnerna i avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ (dvs. kolonnerna i $\mathbf{A}$) utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Dessutom ger Huvudsatsen att $\mathbf{F}$ är bijektiv och Sats 8.2 ger att avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}^{-1}$ är $\mathbf{A}^{-1}$. Då

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\11\\8\end{pmatrix}$$

gäller $\mathbf{F}^{-1}(1,2,3) = (11,11,8)$.

Bättra lösning med färre beräckningar: Om $\mathbf{A}$ betecknar avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ gäller

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Dessa tre ekvationer kan skrivas som en matrisekvation

$$\mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

Vi viser nedan att $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är inverterbara. Då $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ gäller $\mathbf{A} = \mathbf{CB}^{-1}$ och $\mathbf{A}$ är därför inverterbar enligt Sats 4.4. Huvudsatsen ger då att kolonnerna i avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ (dvs. kolonnerna i $\mathbf{A}$) utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Dessutom ger Huvudsatsen att $\mathbf{F}$ är bijektiv och Sats 8.2 ger att avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}^{-1}$ är

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{CB}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{BC}^{-1}.$$

Beräkningen

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B} &= \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 3\\ &= 0 + (-2) + 6 - 0 - (-1) - 6 = -1 \neq 0\end{aligned}$$

ger att $\mathbf{B}$ är inverterbar. Vi viser härnäst att $\mathbf{C}$ är inverterbar och beräknar inversen.

$$\left\{\begin{array}{rrrcccc} -x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & y_1 & & \\ x_1 & +3x_2 & -\ x_3 & = & & y_2 & \\ & -\ x_2 & +\ x_3 & = & & & y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_3 = y_1 + y_2 \\ -x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 = -y_1 - 2y_2 \\ -x_2 = -y_1 - y_2 + y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 & (\cdot - 1) \\ -x_2 = -y_1 - y_2 + y_3 & (\cdot - 1) \\ x_3 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 - y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Alltså är $\mathbf{C}$ inverterbar med inversen

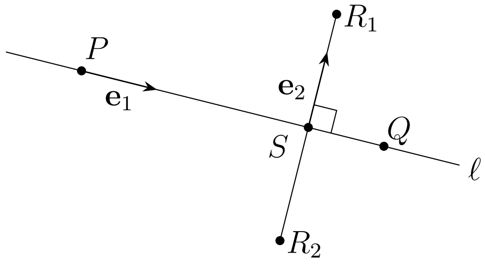
$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Då $\mathbf{F}^{-1}$ har avbildningsmatrisen $\mathbf{A}^{-1}$ gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

varav $\mathbf{F}^{-1}(1, 2, 3) = (11, 11, 8)$.

6. Vi beräknar först enhetsvektorn $\mathbf{e}_1$ i $\overrightarrow{PQ}$:s riktning.



Då $\overrightarrow{PQ} = (2-0, 3-1) = (2,2)$ erhålls

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\|(2,2)\|}(2,2) = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2}}(2,2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,2)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1).\end{aligned}$$

Därmed kan fotpunkten S bestämmas

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \frac{\sqrt{80}}{5}\mathbf{e}_1 = (0,1) + \frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 1+\frac{2\sqrt{10}}{5}\right).$$

Enhetsvektorn $\mathbf{e}_2$ fås genom att rotera $\mathbf{e}_1$ vinkeln $\pi/2$ i positiv led kring O:

$$\begin{pmatrix}\cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2)\\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

dvs. $\mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$. Vi har alltså

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR_1} &= \overrightarrow{OS} + \frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{e}_2 = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 1+\frac{2\sqrt{10}}{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)\\ &= \left(\frac{2\sqrt{10}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10}, 1+\frac{2\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR_2} &= \overrightarrow{OS} - \frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{e}_2 = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 1+\frac{2\sqrt{10}}{5}\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)\\ &= \left(\frac{2\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{10}, 1+\frac{2\sqrt{10}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 1+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right).\end{aligned}$$

De två möjligheter för R är alltså

$$R_1\colon \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \quad \text{och} \quad R_2\colon \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 1+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right).$$