LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2025-03-17 kl. 8.00–13.00

1. Svar: a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **b)** $\ln 6$ **c)** $2e^2$

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} \left(x - \frac{2}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{5}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

b) Via partialbråksuppdelning av integranden erhålles att

$$\int_1^3 \frac{x+6}{x^2+3x}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \Big[2\ln|x| - \ln|x+3|\Big]_1^3$$
$$= 2\ln 3 - \ln 6 - 2\ln 1 + \ln 4 = \ln 6.$$

c) Variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x}$, följt av partialintegrering, ger att

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad dx = 2t\,dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 1, \quad x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 2te^t\,dt$$
$$= \big[2te^t\big]_1^2 - \int_1^2 2e^t\,dt = 4e^2 - 2e - \big[2e^t\big]_1^2 = 4e^2 - 2e - \big(2e^2 - 2e\big) = 2e^2.$$

2. Svar: a) $y(x) = (4\arctan x - \pi)e^x$ **b)** $y(x) = \dfrac{1}{3-2x}$

Lösningsförslag:

a) Via multiplikation med den integrerande faktorn e^{-x} erhålles att

$$y' - y = \frac{4e^x}{1+x^2} \iff y'e^{-x} - ye^{-x} = \frac{4}{1+x^2} \iff \frac{d}{dx}\big(ye^{-x}\big) = \frac{4}{1+x^2}$$
$$\iff ye^{-x} = \int \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\arctan x + C \iff y = (4\arctan x + C)e^x,$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ innebär att

$$0 = (4\arctan 1 + C)e \iff C = -\pi.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = (4\arctan x - \pi)e^x.$$

b) Omskrivning och integrering ger att

$$y' = 2y^2 \overset{y\neq 0}{\iff} \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2 \iff \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2\,dx$$
$$\iff -\frac{1}{y} = 2x + C \iff y = -\frac{1}{2x+C},$$

där $C \in \mathbb{R}$. Notera att vi, på grund av begynnelsevillkoret $y(1) = 1$, kan anta att $y \neq 0$ i uträkningen ovan. Villkoret implicerar att

$$-1 = 2 + C \quad \iff \quad C = -3.$$

Begynnelsevärdesproblemet har följaktligen lösningen

$$y(x) = -\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{3-2x}.$$

3. Svar: a) $\dfrac{3\pi}{2}$ **b)** $\dfrac{2}{3}$

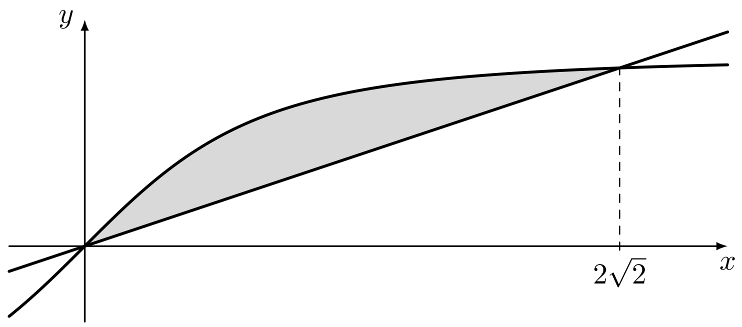
Lösningsförslag:

a) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av den generaliserade integralen

$$\pi \int_8^\infty \left(\frac{1}{x^{2/3}}\right)^2 dx = \pi \int_8^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\, dx = \lim_{X\to\infty} \pi \int_8^X \frac{1}{x^{4/3}}\, dx = \lim_{X\to\infty} \pi \left[-\frac{3}{x^{1/3}}\right]_8^X$$
$$= \lim_{X\to\infty} \pi \left(-\frac{3}{X^{1/3}} + \frac{3}{2}\right) = \pi\left(0 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

b) Skärningspunkterna mellan kurvan $y = x/\sqrt{1+x^2}$ och linjen $y = x/3$ bestäms av att

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{3} \quad \iff \quad 3x = x\sqrt{1+x^2} \quad \iff \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad \sqrt{1+x^2} = 3$$
$$\iff \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}.$$



Den sökta arean ges av integralen

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{3}\right) dx = \left[\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{6}\right]_0^{2\sqrt{2}} = 3 - \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{2}{3}.$$

4. Svar: $y(x) = (3x+2)e^{2x} + (x-2)e^{3x}$

Lösningsförslag:

Det karakteristiska polynomet $r^2 - 4r + 4$ har nollstället 2 med multiplicitet 2, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Med ansatsen $y_p = z(x)e^{3x} = ze^{3x}$ är

$$\begin{aligned} y_p' &= \big(z' + 3z\big)e^{3x}, \\ y_p'' &= \big(z'' + 6z' + 9z\big)e^{3x}, \end{aligned}$$

vilket vid insättning i differentialekvationen ger att

$$\begin{aligned} &\big(z'' + 6z' + 9z\big)e^{3x} - 4\big(z' + 3z\big)e^{3x} + 4ze^{3x} = xe^{3x} \\ &\qquad\qquad \iff \quad z'' + 2z' + z = x. \end{aligned}$$

Ansatsen $z_p = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $z_p' = A$ och $z_p'' = 0$) att

$$0 + 2A + (Ax + B) = x \quad \iff \quad Ax + 2A + B = x$$

$$\iff \quad \begin{cases} A \phantom{{}+B} = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -2. \end{cases}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = (x-2)e^{3x}$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)e^{2x} + (x-2)e^{3x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = (2C_1 x + C_1 + 2C_2)e^{2x} + (3x - 5)e^{3x}.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$ erhålles att

$$\begin{cases} C_2 - 2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 - 5 = 2 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = (3x+2)e^{2x} + (x-2)e^{3x}.$$

5. Svar: a) $f'(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -3$ **b)** -5 **c)** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Lösningsförslag:

a) Maclaurinpolynomet till f av ordning 4 ges av

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 2 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{8}.$$

Identifiering av koefficienter ger att $f'(0) = 0$ samt att

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{8} \quad \iff \quad f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{8} = -3.$$

b) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samt B_6 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned}
e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t), \\
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_2(t), \\
\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_3(t),
\end{aligned}$$

och därmed är

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + (-x)^3 B_1(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_4(x)$$

och

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^4 B_2(2x) = 1 - 2x^2 + x^4 B_5(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x} - \cos(2x) + x}{\ln(1+x) - x} &= \frac{\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_4(x)\right) - \left(1 - 2x^2 + x^4 B_5(x)\right) + x}{\left(x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_3(x)\right) - x} \\
&= \frac{\frac{5x^2}{2} + x^3 B_6(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^3 B_3(x)} = \frac{\frac{5}{2} + x B_6(x)}{-\frac{1}{2} + x B_3(x)} \longrightarrow \frac{\frac{5}{2} + 0}{-\frac{1}{2} + 0} = -5, \quad \text{då } x \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

c) Låt

$$g(x) = \frac{\arctan x}{x},$$

och låt G vara en primitiv funktion till g. Då gäller att

$$H(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\arctan t}{t}\, dt = \int_{1/x}^{x} g(t)\, dt = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right),$$

och det följer att

$$\begin{aligned}
H'(x) &= G'(x) - G'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = g(x) + \frac{1}{x^2} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{\arctan x + \arctan \frac{1}{x}}{x}.
\end{aligned}$$

Därmed är

$$H'\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\arctan \sqrt{3} + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Anmärkning: Allmänt gäller att

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2, & \text{om } x > 0, \\ -\pi/2, & \text{om } x < 0, \end{cases}$$

vilket ger att

$$H'(x) = \begin{cases} \pi/(2x), & \text{om } x > 0, \\ -\pi/(2x), & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

6. **Svar:** 5 kg salt

Lösningsförslag:
Låt $y(t)$ beteckna mängden salt i kilogram som finns i tanken efter tiden t minuter från att processen startat. Eftersom volymen vätska i tanken ökar med 5 liter per minut, så innehåller tanken $1500 + 5t$ liter lösning efter t minuter. Sålunda uppfyller y differentialekvationen

$$y' = -\frac{y}{1500 + 5t} \cdot 10 \quad \Longleftrightarrow \quad y' + \frac{2y}{300 + t} = 0.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{2\ln(300+t)} = (300 + t)^2$ ger att

$$y' \cdot (300 + t)^2 + 2y \cdot (300 + t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(y \cdot (300 + t)^2\Big) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad y \cdot (300 + t)^2 = C \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{C}{(300 + t)^2},$$

där $C \in \mathbb{R}$. Från begynnelsevillkoret $y(0) = 20$ följer det att

$$20 = \frac{C}{300^2} \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1800000,$$

vilket innebär att

$$y(t) = \frac{1800000}{(300 + t)^2}.$$

Mängden salt (i kilogram) som finns i tanken efter 5 timmar är således

$$y(5 \cdot 60) = y(300) = \frac{1800000}{600^2} = \frac{1800000}{360000} = 5.$$