LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2024-04-08 kl. 14.00–19.00

1. Svar: a) $-\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{1}{9}$ **c)** $6+\ln 7$ **d)** $\dfrac{1}{2e^4}$

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos(3x)\,dx = \left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = -\frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\int_2^6 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^6 = -\frac{1}{72}+\frac{1}{8} = \frac{1}{9}$

c) Via polynomdivision av integranden erhålles att

$$\int_{-1}^{5} \frac{x+3}{x+2}\,dx = \int_{-1}^{5} \frac{1\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx = \int_{-1}^{5}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)dx =$$
$$= \Big[x+\ln|x+2|\Big]_{-1}^{5} = 5+\ln 7-(-1+\ln 1) = 6+\ln 7.$$

d) För varje $X\in\mathbb{R}$ är

$$\int_2^X xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_2^X = \left[-\frac{1}{2e^{x^2}}\right]_2^X = -\frac{1}{2e^{X^2}}+\frac{1}{2e^4}.$$

Det följer att

$$\int_2^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty}\int_2^X xe^{-x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{X^2}}+\frac{1}{2e^4}\right) = 0+\frac{1}{2e^4} = \frac{1}{2e^4}.$$

2. Svar: a) $y(x)=\sqrt{\ln\big(x^2+1\big)+1}$ **b)** $y(x)=(x\ln x-x+1)e^x$

Lösningsförslag:

a) Omskrivning och integrering ger att

$$\big(x^2+1\big)yy' = x \iff y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1} \iff \int y\,dy = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$
$$\iff \frac{y^2}{2} = \frac{\ln\big(x^2+1\big)}{2}+C \iff y^2 = \ln\big(x^2+1\big)+2C,$$

där $C\in\mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0)=1$ innebär att

$$\frac{1^2}{2} = \frac{\ln\big(0^2+1\big)}{2}+C \iff C=\frac{1}{2}.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x)=\sqrt{\ln\big(x^2+1\big)+1}.$$

b) Via multiplikation med den integrerande faktorn e^{-x} erhålles att

$$y' - y = e^x \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x}y' - e^{-x}y = \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(e^{-x}y\big) = \ln x$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-x}y = \int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + C$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = (x \ln x - x + C)e^x,$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ innebär att

$$e^{-1} \cdot 0 = 1 \ln 1 - 1 + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = (x \ln x - x + 1)e^x.$$

3. Svar: a) $2 \ln 2$ **b)** $\dfrac{\pi^2}{18}$

Lösningsförslag:

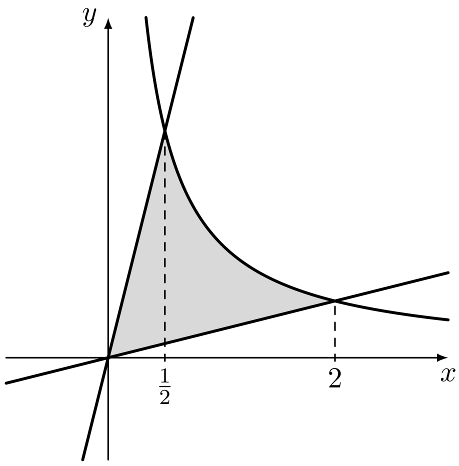
a) Skärningspunkterna mellan kurvan $y = \frac{1}{x}$ och linjen $y = 4x$ bestäms av att

$$\frac{1}{x} = 4x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2},$$

medan skärningspunkterna mellan samma kurva och linjen $y = \frac{x}{4}$ uppfyller att

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 2.$$

Området framgår av figuren nedan.



Den sökta arean ges av summan av integralerna

$$\int_0^{1/2} \left(4x - \frac{x}{4}\right) dx + \int_{1/2}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx = \frac{15}{4}\int_0^{1/2} x\, dx + \int_{1/2}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{15}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[\ln|x| - \frac{x^2}{8}\right]_{1/2}^{2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{8} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \left(\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{32}\right) = 2 \ln 2.$$

b) Med skivformeln erhålles den efterfrågade volymen av integralen

$$\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{9}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{9}\left[3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}\left[\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{\pi^2}{18}.$$

4. Svar: $y(x) = -(x+2)e^x + 2e^{2x}$

Lösningsförslag:
Det karakteristiska polynomet $r^2 - 3r + 2$ har nollställena 1 respektive 2, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Med ansatsen $y_p = z(x)e^x = ze^x$ är

$$\begin{aligned} y_p' &= \big(z' + z\big)e^x, \\ y_p'' &= \big(z'' + 2z' + z\big)e^x, \end{aligned}$$

vilket vid insättning i differentialekvationen ger att

$$\big(z'' + 2z' + z\big)e^x - 3\big(z' + z\big)e^x + 2ze^x = e^x \quad\Longleftrightarrow\quad z'' - z' = 1.$$

Ansatsen $z_p = Ax$, där $A \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $z_p' = A$ och $z_p'' = 0$) att

$$0 - A = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad A = -1.$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = -xe^x$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = (-x + C_1)e^x + C_2e^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = (-x + C_1 - 1)e^x + 2C_2e^{2x}.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \phantom{{}-1} = 0 \\ C_1 + 2C_2 - 1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -(x+2)e^x + 2e^{2x}.$$

5. Svar: a) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^4}{8}$; $f^{(4)}(0)=3$ **b)** $2\big(\sqrt{2}-1\big)$

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3 samt B_4 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^4B_1(t),$$
$$\arctan t=t-\frac{t^3}{3}+t^5B_2(t),$$

och därmed är

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3}+\left(\frac{x}{2}\right)^5B_2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+x^5B_3(x).$$

Sålunda gäller att

$$f(x)=\ln(1+x)\arctan\left(\frac{x}{2}\right)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^4B_1(x)\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+x^5B_3(x)\right)=$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{6}+x^5B_4(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+x^5B_4(x),$$

varav det (enligt entydighetssatsen för Maclaurinutveckling) följer att Maclaurinpolynomet av ordning 4 till funktionen f är

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}.$$

Koefficienten framför x^4 i detta polynom ges av $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$, och följaktligen är

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{1}{8}\quad\Longleftrightarrow\quad f^{(4)}(0)=\frac{4!}{8}=\frac{24}{8}=3.$$

b) Låt

$$f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x},$$

och låt F vara en primitiv funktion till f. Då gäller att

$$G(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin(\pi t)}{t}\,dt=\int_x^{x^2}f(t)\,dt=F\big(x^2\big)-F(x),$$

och det följer att

$$G'(x)=F'\big(x^2\big)\cdot 2x-F'(x)=2xf\big(x^2\big)-f(x)=2x\cdot\frac{\sin\big(\pi x^2\big)}{x^2}-\frac{\sin(\pi x)}{x}=$$
$$=\frac{2\sin\big(\pi x^2\big)-\sin(\pi x)}{x}.$$

Därmed är

$$G'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sin\big(\frac{\pi}{4}\big)-\sin\big(\frac{\pi}{2}\big)}{\frac{1}{2}}=2\big(\sqrt{2}-1\big).$$

6. Svar: $160 \ln 2$ meter

Lösningsförslag:
Differentialekvationen för båtens hastighet är separabel och lösningen ges av

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 \iff -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} = k \iff -\int \frac{1}{v^2}\, dv = \int k\, dt$$
$$\iff \frac{1}{v} = kt + C \iff v = \frac{1}{kt + C},$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $v(0) = 10$ leder till att

$$\frac{1}{10} = k \cdot 0 + C \iff C = \frac{1}{10}.$$

Vidare innebär villkoret $v(4) = 5$ att

$$\frac{1}{5} = k \cdot 4 + C = 4k + \frac{1}{10} \iff k = \frac{1}{40}.$$

Sålunda ges båtens hastighet (i m/s) av

$$v(t) = \frac{1}{kt + C} = \frac{1}{\frac{1}{40}t + \frac{1}{10}} = \frac{40}{t + 4}.$$

Sträckan som båten glider under de första 60 sekunderna efter motorhaveriet erhålles av integralen

$$\int_0^{60} v(t)\, dt = \int_0^{60} \frac{40}{t+4}\, dt = 40\big[\ln(t+4)\big]_0^{60} = 40 \ln\left(\frac{64}{4}\right) = 40 \ln 16 = 160 \ln 2,$$

dvs. båten förflyttar sig $160 \ln 2$ meter.