LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2024-03-11 kl. 8.00–13.00

1. Svar: a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{\pi - 2}{8}$ **c)** $\ln 3$

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_{1/9}^{1/4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{1/9}^{1/4} = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$

c) Andragradspolynomet i integrandens nämnare har nollställena -1 respektive -3, och faktoriseras därmed som $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Via partialbråksuppdelning erhålles sedan att

$$\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+4x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{x+5}{(x+1)(x+3)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= \Big[2\ln|x+1| - \ln|x+3|\Big]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 4 - 2\ln 1 + \ln 3 = \ln 3.$$

2. Svar: a) $y(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}$ **b)** $y(x) = 2\ln x - 1 + \frac{2}{x^2}$

Lösningsförslag:

a) Omskrivning och integrering ger att

$$\begin{aligned} e^{2y}y' = x \quad &\iff \quad e^{2y}\frac{dy}{dx} = x \quad \iff \quad \int e^{2y}\,dy = \int x\,dx \\ &\iff \quad \frac{e^{2y}}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad \iff \quad e^{2y} = x^2 + 2C \\ &\iff \quad y = \frac{\ln\left(x^2+2C\right)}{2}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ innebär att

$$\frac{e^{2\cdot 0}}{2} = \frac{0^2}{2} + C \quad \iff \quad C = \frac{1}{2}.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}.$$

b) Division med x ger att

$$xy' + 2y = 4\ln x \quad \iff \quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{4\ln x}{x}.$$

Via multiplikation med den integrerande faktorn $e^{2\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2$ erhålles sedan att

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y = \frac{4\ln x}{x} \quad &\iff \quad x^2y' + 2xy = 4x\ln x \quad \iff \quad \frac{d}{dx}\big(x^2y\big) = 4x\ln x \\ \iff \quad x^2y &= \int 4x\ln x\,dx = 2x^2\ln x - \int 2x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2x^2\ln x - x^2 + C \\ \iff \quad y &= 2\ln x - 1 + \frac{C}{x^2}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ innebär att

$$1 = 2\ln 1 - 1 + \frac{C}{1^2} \quad \iff \quad C = 2.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = 2\ln x - 1 + \frac{2}{x^2}.$$

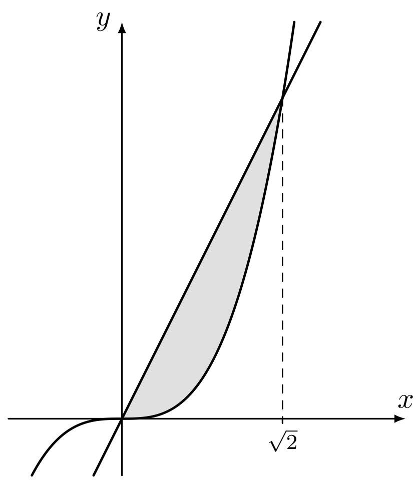
3. Svar: a) 1 **b)** $\dfrac{\pi^2}{3}$

Lösningsförslag:

a) Skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^3$ och linjen $y = 2x$ bestäms av att

$$x^3 = 2x \quad \iff \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Det aktuella området framgår av figuren nedan.



Den sökta arean ges av integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} \big(2x - x^3\big)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2 - 1 = 1.$$

b) Med skivformeln erhålles den efterfrågade volymen av integralen

$$\pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Polynomdivision ger att $x^4 = \big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big)+1$, och därmed är

$$\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big)+1}{x^2+1}\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

4. Svar: $y(x) = -4e^{-2x} + 8e^{-x} - e^x + 2x - 3$

Lösningsförslag:
Det karakteristiska polynomet r^2+3r+2 har nollställena -2 respektive -1, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Om y_{p_1} är en lösning till

$$y'' + 3y' + 2y = -6e^x \tag{1}$$

och y_{p_2} är en lösning till

$$y'' + 3y' + 2y = 4x \tag{2}$$

så löser $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ den givna differentialekvationen.

Med ansatsen $y_{p_1} = z(x)e^x = ze^x$ är

$$\begin{aligned} y_{p_1}' &= \big(z'+z\big)e^x, \\ y_{p_1}'' &= \big(z''+2z'+z\big)e^x, \end{aligned}$$

vilket vid insättning i (1) ger att

$$\big(z''+2z'+z\big)e^x + 3\big(z'+z\big)e^x + 2ze^x = -6e^x \quad\Longleftrightarrow\quad z''+5z'+6z=-6.$$

Ansatsen $z_p = C$, där $C\in\mathbb{R}$, ger sedan vid insättning i ovanstående att

$$6C = -6 \quad\Longleftrightarrow\quad C = -1,$$

vilket innebär att $y_{p_1} = -e^x$. (Notera att det i de föregående beräkningarna också fungerar att direkt göra den enklare ansatsen $y_{p_1} = Ce^x$, där $C\in\mathbb{R}$.) Med ansatsen $y_{p_2} = Ax+B$, där $A,B\in\mathbb{R}$, ger insättning i (2) att

$$0 + 3A + 2(Ax+B) = 4x \quad\Longleftrightarrow\quad 2Ax + 3A + 2B = 4x$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2A \phantom{{}+2B} = 4 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -3, \end{cases}$$

och därmed är $y_{p_2} = 2x-3$. Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = -e^x + 2x - 3$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^x + 2x - 3, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -2C_1e^{-2x} - C_2e^{-x} - e^x + 2.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 - 3 = 0 \\ -2C_1 - C_2 - 1 + 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -2C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = \ 8. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -4e^{-2x} + 8e^{-x} - e^x + 2x - 3.$$

5. Svar: a) -6 **b)** Konvergent

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samt B_6 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned} \sin t &= t + t^3B_1(t), \\ e^t &= 1 + t + t^2B_2(t), \\ \arctan t &= t - \frac{t^3}{3} + t^5B_3(t), \end{aligned}$$

och därmed är

$$\sin\bigl(x^2\bigr) = x^2 + \bigl(x^2\bigr)^3B_1\bigl(x^2\bigr) = x^2 + x^6B_4(x)$$

och

$$e^{2x} = 1 + 2x + (2x)^2B_2(2x) = 1 + 2x + x^2B_5(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned} \frac{\sin\bigl(x^2\bigr) - x^2e^{2x}}{x - \arctan x} &= \frac{x^2 + x^6B_4(x) - x^2\bigl(1 + 2x + x^2B_5(x)\bigr)}{x - \bigl(x - \frac{x^3}{3} + x^5B_3(x)\bigr)} = \\ &= \frac{-2x^3 + x^4B_6(x)}{\frac{x^3}{3} - x^5B_3(x)} = \frac{-2 + xB_6(x)}{\frac{1}{3} - x^2B_3(x)} \longrightarrow \frac{-2+0}{\frac{1}{3} - 0} = -6, \quad \text{då } x \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

b) För $x \geq 1$ gäller att

$$0 \leq \frac{x}{x^3 + \ln x} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Vidare vet vi (från sats 13.11) att $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent, och sålunda måste (enligt sats 13.10) även den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + \ln x}\,dx$$

vara konvergent.

6. Svar: a) T.ex. $y(t) = 22 + 48 \cdot 2^{-t/10}$ (t tiden i minuter) **b)** 10 minuter

Lösningsförslag:

a) Låt $y(t)$ beteckna kroppens temperatur i grader Celsius efter tiden t minuter, där $t = 0$ svarar mot tidpunkten då temperaturen är 70 °C. Då uppfyller y differentialekvationen

$$y' = -k(y - 22) \iff y' + ky = 22k,$$

där k är en konstant. Multiplikation med den integrerande faktorn e^{kt} ger att

$$\begin{aligned} y'e^{kt} + kye^{kt} = 22ke^{kt} &\iff \frac{d}{dt}\left(ye^{kt}\right) = 22ke^{kt} \\ &\iff ye^{kt} = \int 22ke^{kt}\,dt = 22e^{kt} + C \\ &\iff y = 22 + Ce^{-kt}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 70$ ger att $C = 48$ och därmed gäller att

$$y(t) = 22 + 48e^{-kt}.$$

Vidare ger villkoret $y(30) = 28$ att

$$\begin{aligned} 22 + 48e^{-30k} = 28 \iff e^{-30k} = \frac{1}{8} &\iff -30k = \ln\frac{1}{8} = -3\ln 2 \\ &\iff k = \frac{\ln 2}{10}. \end{aligned}$$

Sålunda är

$$y(t) = 22 + 48e^{-\frac{\ln 2}{10}t} = 22 + 48 \cdot 2^{-t/10}.$$

b) För att bestämma tidpunkten t_1 då kroppens temperatur är 25 °C så löser vi ekvationen

$$\begin{aligned} y(t_1) = 25 \iff 22 + 48 \cdot 2^{-t_1/10} = 25 &\iff 2^{t_1/10} = 16 \\ \iff \frac{t_1}{10} = 4 &\iff t_1 = 40. \end{aligned}$$

Följaktligen tar det 10 minuter för att kroppens temperatur ska sjunka från 28 °C till 25 °C.