LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2023-08-14 kl. 14.00–19.00

1. Svar: a) 3 **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$ **d)** 1

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \left[3x^{1/3}\right]_1^8 = 3\cdot 2 - 3\cdot 1 = 3$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\tan x\right]_0^{\pi/3} = \sqrt{3}-0=\sqrt{3}$

c) Via partialintegrering erhålles att

$$\int_0^{\pi/3} x\sin x\,dx = \left[x\cdot(-\cos x)\right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} 1\cdot(-\cos x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 + \int_0^{\pi/3}\cos x\,dx = -\frac{\pi}{6} + \left[\sin x\right]_0^{\pi/3} = -\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}.$$

d) Variabelsubstitutionen $t=e^x$ ger att

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \begin{bmatrix} t=e^x, \quad dt=e^x\,dx \\ x=-1 \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{e}, \quad x=1\;\Rightarrow\; t=e\end{bmatrix} = \int_{1/e}^{e}\frac{1}{1+t}\,dt =$$
$$= \left[\ln|1+t|\right]_{1/e}^{e} = \ln(1+e)-\ln(1+1/e) = \ln\left(\frac{1+e}{1+1/e}\right) = \ln e = 1.$$

2. Svar: a) $y(x)=e^{x^2}+e^{-x^2}$ **b)** $y(x)=\dfrac{1}{2-x+x\ln x}$

Lösningsförslag:

a) Multiplikation med den integrerande faktorn e^{x^2} ger att

$$\begin{aligned} y'+2xy=4xe^{x^2} \quad &\iff \quad e^{x^2}y'+2xe^{x^2}y=4xe^{2x^2} \\ &\iff \quad \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}y\right)=4xe^{2x^2} \\ &\iff \quad e^{x^2}y=\int 4xe^{2x^2}\,dx = e^{2x^2}+C \\ &\iff \quad y=e^{x^2}+Ce^{-x^2}, \end{aligned}$$

där $C\in\mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0)=2$ innebär att

$$2=e^{0^2}+Ce^{-0^2} \quad \iff \quad C=1.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}.$$

b) Omskrivning och integrering ger att

$$\begin{aligned} y' + y^2 \ln x = 0 \quad &\overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \ln x \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int \ln x \, dx \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + C, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Notera att vi, på grund av begynnelsevillkoret $y(1) = 1$, kan anta att $y \neq 0$ i uträkningen ovan. Villkoret implicerar att

$$\frac{1}{1} = 1 \cdot \ln 1 - 1 + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 2.$$

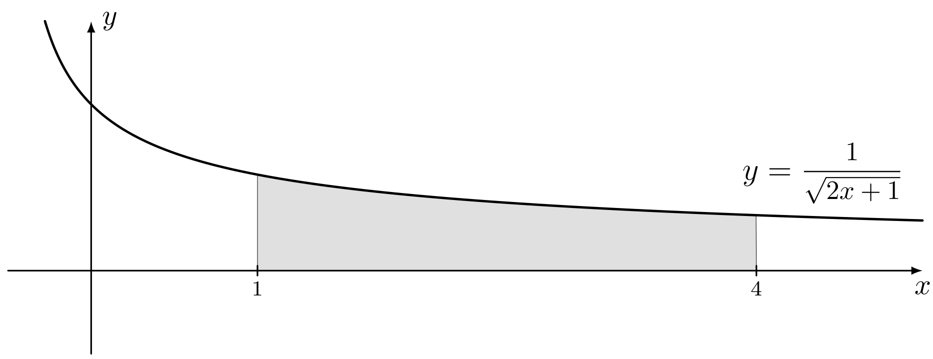
Begynnelsevärdesproblemet har följaktligen lösningen

$$y(x) = \frac{1}{2 - x + x\ln x}.$$

3. Svar: a) $\dfrac{\pi \ln 3}{2}$ **b)** 6π

Lösningsförslag:

Rotationskropparna genereras av det skuggade området i figuren nedan.



a) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\begin{aligned} \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{2x+1}\, dx = \pi \left[\frac{\ln|2x+1|}{2}\right]_1^4 = \\ = \frac{\pi}{2}(\ln 9 - \ln 3) = \frac{\pi \ln 3}{2}. \end{aligned}$$

b) Rörformeln ger att den sökta volymen är

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\, dx = \left[\begin{matrix} t = \sqrt{2x+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = t\,dt \\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}, \quad x = 4 \Rightarrow t = 3 \end{matrix}\right] = \\ = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}}{t} \cdot t\, dt = \pi \int_{\sqrt{3}}^3 \big(t^2 - 1\big)\, dt = \pi \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{\sqrt{3}}^3 = \\ = \pi\big(9 - 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}\big) = 6\pi. \end{aligned}$$

4. Svar: $y(x) = e^{-x} + 2e^{3x} - (x+1)e^{2x}$

Lösningsförslag:
Det karakteristiska polynomet $r^2 - 2r - 3$ har nollställena -1 respektive 3, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Med ansatsen $y_p = z(x)e^{2x} = ze^{2x}$ är

$$\begin{aligned} y_p' &= \big(z' + 2z\big)e^{2x}, \\ y_p'' &= \big(z'' + 4z' + 4z\big)e^{2x}, \end{aligned}$$

vilket vid insättning i differentialekvationen ger att

$$\begin{aligned} \big(z'' + 4z' + 4z\big)e^{2x} - 2\big(z' + 2z\big)e^{2x} - 3ze^{2x} &= (3x+1)e^{2x} \\ \iff \quad z'' + 2z' - 3z &= 3x + 1. \end{aligned}$$

Ansatsen $z_p = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $z_p' = A$ och $z_p'' = 0$) att

$$0 + 2A - 3(Ax + B) = 3x + 1 \quad \iff \quad -3Ax + 2A - 3B = 3x + 1$$

$$\iff \quad \begin{cases} -3A \phantom{{}-3B} = 3 \\ 2A - 3B = 1 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = -1. \end{cases}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = -(x+1)e^{2x}$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - (x+1)e^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} - (2x+3)e^{2x}.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 2$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 2 \\ -C_1 + 3C_2 - 3 = 2 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + 3C_2 = 5 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = e^{-x} + 2e^{3x} - (x+1)e^{2x}.$$

5. Svar: a) $1 + x - \dfrac{x^3}{3}$ **b)** $1 + \ln 2$

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2 och B_3 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^4 B_1(t), \\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_2(t). \end{aligned}$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned} f(x) = e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4 B_1(x)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B_2(x)\right) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4 B_3(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + x^4 B_3(x), \end{aligned}$$

varav det (enligt entydighetssatsen för Maclaurinutveckling) följer att Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ är

$$1 + x - \frac{x^3}{3}.$$

b) För att partialbråksuppdela integranden ansätter vi

$$\frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

där $A, B, C \in \mathbb{R}$. Detta ger att $A = 1$, $B = -1$ och $C = 2$. Sålunda är

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx &= \int_1^X \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx = \\ &= \left[\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{2}{x+1}\right]_1^X = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{x+1}\right]_1^X = \\ &= \ln\left|\frac{X}{X+1}\right| - \frac{2}{X+1} - \ln\frac{1}{2} + 1 \longrightarrow \ln 1 - 0 - \ln\frac{1}{2} + 1 = \\ &= \ln 2 + 1, \quad \text{då } X \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Detta visar att den givna generaliserade integralen är konvergent med värdet

$$\int_1^\infty \frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx = 1 + \ln 2.$$

6. Svar: $y(x) = \big(1+x^2\big)(4\arctan x + 1 - \pi)$

Lösningsförslag:

Vi noterar först att eftersom y är kontinuerlig, så är integranden $\frac{2ty(t)}{1+t^2}$ kontinuerlig, och det följer då av analysens huvudsats att funktionen

$$f(x) = \int_1^x \frac{2ty(t)}{1+t^2}\,dt$$

är deriverbar. Därmed är även

$$y(x) = 4x - 2 + \int_1^x \frac{2ty(t)}{1+t^2}\,dt$$

deriverbar. Derivering av båda led i integralekvationen och tillämpning av analysens huvudsats ger att

$$y'(x) = 4 + \frac{2xy(x)}{1+x^2}.$$

Vidare ger insättning av $x=1$ i integralekvationen att

$$y(1) = 4\cdot 1 - 2 + \int_1^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2}\,dt = 4 - 2 + 0 = 2.$$

Det följer att integralekvationen är ekvivalent med begynnelsevärdesproblemet

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4, \quad y(1) = 2.$$

Eftersom

$$\int \left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = -\ln\big(1+x^2\big) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

så ges en integrerande faktor till differentialekvationen av

$$e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Multiplikation med denna integrerande faktor leder till att

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4 \quad &\iff \quad \frac{y'}{1+x^2} - \frac{2xy}{\big(1+x^2\big)^2} = \frac{4}{1+x^2} \\
&\iff \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{1+x^2}\right) = \frac{4}{1+x^2} \\
&\iff \quad \frac{y}{1+x^2} = \int \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\arctan x + B \\
&\iff \quad y = \big(1+x^2\big)(4\arctan x + B),
\end{aligned}$$

där $B \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ innebär att

$$2 = \big(1+1^2\big)(4\arctan 1 + B) \quad \iff \quad B = 1 - \pi.$$

Sålunda har integralekvationen lösningen

$$y(x) = \big(1+x^2\big)(4\arctan x + 1 - \pi).$$