LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2023-04-17 kl. 14.00–19.00

1. Svar: a) $\dfrac{1}{8}$ **b)** $\dfrac{\ln 5}{2}$ **c)** $2-\sqrt{2}$ **d)** $-\ln 3$

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx = \left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+1-\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^3 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\Big[\ln\big(x^2+1\big)\Big]_{-1}^3 = \frac{1}{2}\big(\ln 10 - \ln 2\big) = \frac{\ln 5}{2}$

c) Variabelsubstitutionen $t=\cos x$ ger att

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \begin{bmatrix} t=\cos x, & (-1)\, dt = \sin x\, dx \\ x=0 \Rightarrow t=1, & x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-1)\, dt =$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_{\frac{1}{2}}^1 = 2-\sqrt{2}.$$

d) Med polynomdivision av integranden erhålles att

$$\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\, dx = \int_0^2 \left(x-1-\frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}-x-\ln|x+1|\right]_0^2 =$$
$$= 2-2-\ln 3 - 0 + 0 + \ln 1 = -\ln 3.$$

2. Svar: a) $y(x)=\sqrt{2-e^{-x^2}}$ **b)** $y(x) = x-1+x\ln x$

Lösningsförslag:

a) Integrering ger att

$$\begin{aligned} yy' = xe^{-x^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = xe^{-x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \int y\, dy = \int xe^{-x^2}\, dx \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 = -e^{-x^2} + 2C, \qquad C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(0)=1$ innebär att

$$1^2 = -e^{-0^2} + 2C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \sqrt{2-e^{-x^2}}.$$

b) Via division med $x > 0$ erhålles att

$$xy' - y = x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y' - \frac{1}{x}y = 1 + \frac{1}{x}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ ger sedan att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x}y = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \ln x - \frac{1}{x} + C \\
&\Longleftrightarrow \quad y = Cx - 1 + x\ln x,
\end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ innebär att

$$0 = C - 1 + \ln 1 \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = x - 1 + x\ln x.$$

3. Svar: a) $\dfrac{1}{3} + \ln 2$ **b)** $\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{4}$

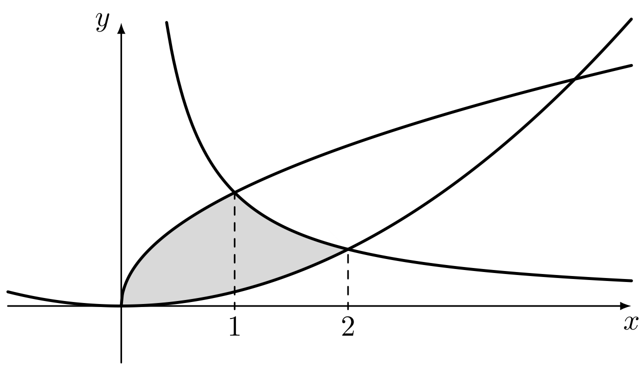
Lösningsförslag:

a) För att bestämma integrationsgränserna löser vi ekvationerna

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1,$$

och

$$\frac{1}{x} = \frac{x^2}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$



Den sökta arean ges följaktligen av

$$\int_0^1\left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right)dx + \int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{24} - 0 + 0 + \ln 2 - \frac{1}{3} - \ln 1 + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \ln 2.$$

b) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\begin{aligned}
\pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}e^x\right)^2 dx &= \pi \int_0^1 xe^{2x}\,dx = \pi\left(\left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx\right) = \\
&= \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi e^2}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\left(e^2+1\right)}{4}.
\end{aligned}$$

4. Svar: $y(x) = -e^{-2x} + \left(x^2 - x + 2\right)e^x$

Lösningsförslag:

a) Det karakteristiska polynomet $r^2 + r - 2$ har nollställena -2 respektive 1, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Med ansatsen $y_p = z(x)e^x = ze^x$ är

$$\begin{aligned}
y_p' &= \left(z' + z\right)e^x, \\
y_p'' &= \left(z'' + 2z' + z\right)e^x,
\end{aligned}$$

vilket vid insättning i differentialekvationen ger att

$$\left(z'' + 2z' + z\right)e^x + \left(z' + z\right)e^x - 2ze^x = (6x-1)e^x \quad \Longleftrightarrow \quad z'' + 3z' = 6x - 1.$$

Ansatsen $z_p = Ax^2 + Bx$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $z_p' = 2Ax + B$ och $z_p'' = 2A$) att

$$2A + 3(2Ax + B) = 6x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 6Ax + 2A + 3B = 6x - 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6A & = 6 \\ 2A + 3B & = -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = & 1 \\ B = & -1. \end{cases}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = \left(x^2 - x\right)e^x$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + \left(x^2 - x + C_2\right)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -2C_1e^{-2x} + \left(x^2 + x + C_2 - 1\right)e^x.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 1 \\ -2C_1 + C_2 - 1 & = 3 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = \ 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -e^{-2x} + \left(x^2 - x + 2\right)e^x.$$

5. Svar: a) $\dfrac{7}{4}$ **b)** $\dfrac{1}{2}$

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samt B_6 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$e^t = 1 + t + t^2 B_1(t),$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_2(t),$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_3(t),$$

och därmed är

$$e^{3x} = 1 + 3x + (3x)^2 B_1(3x) = 1 + 3x + x^2 B_4(x)$$

och

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^4 B_3(2x) = 1 - 2x^2 + x^4 B_5(x).$$

Sålunda gäller att

$$\frac{xe^{3x} - \ln(1+x)}{1 - \cos(2x)} = \frac{x\big(1 + 3x + x^2 B_4(x)\big) - \big(x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x)\big)}{1 - \big(1 - 2x^2 + x^4 B_5(x)\big)} =$$
$$= \frac{\frac{7}{2}x^2 + x^3 B_6(x)}{2x^2 - x^4 B_5(x)} = \frac{\frac{7}{2} + x B_6(x)}{2 - x^2 B_5(x)} \longrightarrow \frac{\frac{7}{2} + 0}{2 - 0} = \frac{7}{4}, \quad \text{då } x \longrightarrow 0.$$

b) Genom upprepad partialintegrering erhålles att

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int \big(-e^{-x}\big)(-\sin x)\,dx =$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx =$$
$$= -e^{-x}\cos x - \left(-e^{-x}\sin x - \int \big(-e^{-x}\big)\cos x\,dx\right) =$$
$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx.$$

Följaktligen är

$$2\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}(-\cos x + \sin x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$
$$\iff \quad \int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos x + \sin x) + B, \qquad B = \frac{C}{2}.$$

Sålunda har vi att

$$\int_0^X e^{-x}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{-x}(-\cos x + \sin x)\right]_0^X =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-X}(-\cos X + \sin X) + \frac{1}{2} \longrightarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{då } X \longrightarrow \infty,$$

vilket visar att den givna generaliserade integralen är konvergent med värdet

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}.$$

(I gränsvärdesberäkningen ovan har vi använt att

$$\lim_{X \to \infty} e^{-X} \cos X = 0 \qquad \text{och} \qquad \lim_{X \to \infty} e^{-X} \sin X = 0,$$

vilket t.ex. följer av att

$$\left| \frac{\cos X}{e^X} \right| \leq \frac{1}{e^X} \qquad \text{och} \qquad \left| \frac{\sin X}{e^X} \right| \leq \frac{1}{e^X}.)$$

6. Svar: Största värde: $1 + \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$; minsta värde saknas

Lösningsförslag:
Analysens huvudsats och kedjeregeln ger att

$$f'(x) = \frac{3 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3 - x}{2\sqrt{x}(1 + x)},$$

vilket leder till nedanstående tabell.

	0		3	x
$f'(x)$	ej def.	+	0	−
$f(x)$	lokalt min.	$\nearrow$	lokalt max.	$\searrow$

Vidare är

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{3 - t^2}{1 + t^2} \, dt = \int_1^{\sqrt{x}} \left(-1 + \frac{4}{1 + t^2} \right) dt = \Big[-t + 4 \arctan t \Big]_1^{\sqrt{x}} =$$
$$= -\sqrt{x} + 4 \arctan\left(\sqrt{x}\right) + 1 - \pi.$$

Det största värdet som f antar är följaktligen

$$f(3) = -\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{3} + 1 - \pi = 1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3},$$

medan f saknar minsta värde eftersom

$$f(x) = -\sqrt{x} + 4 \arctan\left(\sqrt{x}\right) + 1 - \pi \longrightarrow -\infty, \quad \text{då } x \longrightarrow \infty.$$