LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2023-03-17 kl. 8.00–13.00

1. Svar: a) 1 **b)** $\dfrac{8}{3}$ **c)** $\ln 3$

Lösningsförslag:
a) Via partialintegrering erhålles att

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx = e - 0 - \big[e^x\big]_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

b) Variabelsubstitutionen $t=\sqrt{x+1}$ ger att

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x+1}, & x=t^2-1, & dx = 2t\,dt \\ x=0 \Rightarrow t=1, & x=3 \Rightarrow t=2 & \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int_1^2 \big(t^2-1\big)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2 = 2\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right) = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

(Även variabelbytet $t=x+1$ fungerar för att beräkna integralen ovan.)
c) Genom att partialbråksuppdela integranden får vi att

$$\int_3^8 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx = \int_3^8 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\big]_3^8 =$$

$$= \ln 6 - \ln 10 - \ln 1 + \ln 5 = \ln\left(\frac{6\cdot 5}{10}\right) = \ln 3.$$

2. Svar: a) $y(x) = 2e^{-x}+e^{4x}-1$ **b)** $y(x) = \dfrac{1}{2-x^2}$

Lösningsförslag:
a) Det karakteristiska polynomet r^2-3r-4 har nollställena -1 respektive 4, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1e^{-x}+C_2e^{4x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ansatsen $y_p = A$, där $A\in\mathbb{R}$, ger vid insättning (med $y_p' = y_p'' = 0$) att

$$0-3\cdot 0 - 4\cdot A = 4 \quad\Longleftrightarrow\quad A=-1.$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p=-1$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-1, \qquad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 2$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 2 \\ -C_1 + 4C_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + 4C_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = 2e^{-x} + e^{4x} - 1.$$

b) Omskrivning och integrering ger att

$$\begin{aligned} y' = 2xy^2 \quad &\overset{y\neq 0}{\iff} \quad \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2x \\ &\iff \quad \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx \\ &\iff \quad -\frac{1}{y} = x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notera att vi, på grund av begynnelsevillkoret $y(1) = 1$, kan anta att $y \neq 0$ i uträkningen ovan. Villkoret innebär att

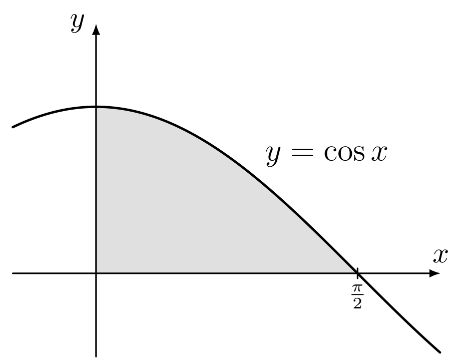
$$-\frac{1}{1} = 1^2 + C \quad \iff \quad C = -2.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \frac{1}{2 - x^2}.$$

3. Svar: a) $\dfrac{\pi^2}{4}$ **b)** $\pi(\pi - 2)$

Lösningsförslag:
Rotationskropparna genereras av det skuggade området i figuren nedan.



a) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + \cos(2x)\big)\,dx = \\ &= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}, \end{aligned}$$

där vi har använt den trigonometriska identiteten $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.
b) Rörformeln ger att den sökta volymen är

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = 2\pi \left(\big[x \sin x \big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin x \, dx \right) =$$
$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 0 - \big[-\cos x \big]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - \big(0 - (-1)\big) \right) = \pi(\pi - 2).$$

4. Svar: a) 3 **b)** $2x + \dfrac{5}{3}x^3$

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4 samt B_5 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_1(t),$$
$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + t^5 B_2(t),$$

och därmed är

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^4 B_1(2x) = 1 - 2x^2 + x^4 B_3(x)$$

och

$$\arctan(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3} + (3x)^5 B_2(3x) = 3x - 9x^3 + x^5 B_4(x).$$

Sålunda gäller att

$$\frac{3x\cos(2x) - \arctan(3x)}{x^3} = \frac{3x\big(1 - 2x^2 + x^4 B_3(x)\big) - \big(3x - 9x^3 + x^5 B_4(x)\big)}{x^3} =$$
$$= \frac{3x^3 + x^5 B_5(x)}{x^3} = 3 + x^2 B_5(x) \longrightarrow 3, \quad \text{då } x \longrightarrow 0.$$

b) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3 samt B_4 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t),$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^4 B_2(t),$$

och därmed är

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + (2x)^4 B_2(2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^4 B_3(x).$$

Sålunda gäller att

$$f(x) = e^x \ln(1+2x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)\right)\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^4 B_3(x)\right) =$$
$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - 2x^3 + x^3 + x^4 B_4(x) = 2x + \frac{5}{3}x^3 + x^4 B_4(x),$$

varav det (enligt entydighetssatsen för Maclaurinutveckling) följer att Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ är

$$2x + \frac{5}{3}x^3.$$

5. Svar: $y(t) = 15 - 14e^{-\frac{t}{25}}$

Lösningsförslag:
Låt $y(t)$ beteckna mängden salt (i kilogram) som finns i tanken efter tiden t minuter från att processen startat. Då uppfyller y differentialekvationen

$$y' = 0{,}15 \cdot 4 - \frac{y}{100} \cdot 4 \quad \Longleftrightarrow \quad y' + \frac{y}{25} = \frac{3}{5}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\frac{t}{25}}$ ger att

$$\begin{aligned} y'e^{\frac{t}{25}} + \frac{y}{25}e^{\frac{t}{25}} = \frac{3}{5}e^{\frac{t}{25}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(ye^{\frac{t}{25}}\right) = \frac{3}{5}e^{\frac{t}{25}} \\ &\Longleftrightarrow \quad ye^{\frac{t}{25}} = \int \frac{3}{5}e^{\frac{t}{25}}\,dt = 15e^{\frac{t}{25}} + C \\ &\Longleftrightarrow \quad y = 15 + Ce^{-\frac{t}{25}}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0{,}01 \cdot 100 = 1$ ger att $C = -14$ och därmed gäller att

$$y(t) = 15 - 14e^{-\frac{t}{25}}.$$

6. Svar: Konvergent med värdet π

Lösningsförslag:
Låt $f(x)$ beteckna integranden, dvs.

$$f(x) = \frac{x+3}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Genom att exempelvis jämföra $f(x)$ med $g(x) = \frac{1}{x^2}$ då $x \to \infty$, inses att den givna generaliserade integralen är konvergent. Konvergensen visas dock även av beräkningen av integralen nedan.

Polynomet i integrandens nämnare har nollstället -1 varav det (efter polynomdivision) följer att

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)\big(x^2+1\big)}.$$

Partialbråksuppdelning ger därefter att

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2+1}.$$

Primitiva funktioner till $f(x)$ ges (under antagandet att $x > -1$) av

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \\
&= \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln\bigl(x^2+1\bigr) + 2\arctan x + C = \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2\arctan x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Slutligen har vi att

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1}\,dx &= \left[\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2\arctan x\right]_0^X = \\
&= \ln\left(\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}\right) + 2\arctan X - \ln 1 - 2\arctan 0 = \\
&= \ln\left(\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}\right) + 2\arctan X \longrightarrow \ln 1 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi, \quad \text{då } X \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

vilket visar att den givna generaliserade integralen är konvergent med värdet

$$\int_0^\infty \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \pi.$$

(I gränsvärdesberäkningen ovan har vi använt att

$$\lim_{X\to\infty} \frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}} = \lim_{X\to\infty} \frac{1+\frac{1}{X}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = 1.)$$