

Hjälpmedel: FORMELBLAD.

Lösningar ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

Alla svar ska förenklas maximalt.

1. Beräkna

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3x)}{x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + e^{\frac{1}{2x}}$       (0.2/st)

d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$       e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+5})$

2. a) Rita kurvan (0.2)

$$y = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - 3x, & 0 < x < 1. \text{ För vilka } x \text{ är funktionen diskontinuerlig?} \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Bestäm ekvationen för **normalen** till kurvan  $y = 4 \arctan 2x$  i den punkten vars  $x$  koordinat är  $1/2$ . (0.4)

c) Är någon av serierna  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3k}$  och  $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k}$  konvergent? (0.4)  
Beräkna i så fall dess summa.

3. a) Skriv om talet  $z = -\sqrt{75} + 5i$  på polär form. (0.3)

b) Lös ekvationen  $z^2 + 6i - 8 = 0$ . Svara på formen  $a + ib$ . (0.3)

c) Ekvationen  $z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5 = 0$  har dubbelrot  $z = -1$ . Lös ekvationen fullständigt. (0.4)

4. Bestäm lokala extrempunkter och eventuella asymptoter (1.0)

till funktionen  $y = 2 + \frac{x^2}{x^2 - 4}$ . Skissera kurvan.

Var god vänd!

5. a) Ekvationen  $x^3 - 3x^2y + y^3 = 3$  definierar implicit en funktion  $y(x)$ . (0.5)

Använd **implicit** derivering för att bestämma  $y'(1)$  om  $y(1) = 2$ .

b) Visa olikheten  $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$ ,  $x \geq 1$ . (0.5)

6. En pussel ska förpackas i en rak pappcylinder med tvärsnittsarea i form av en liksidig triangel. Volymen är bestämd till  $4 \text{ dm}^3$ . Hur lång ska triangelsidan och cylinderhöjden vara för att pappåtgången ska minimeras? (1.0)

Obs.: Denna förpackning benämnes **cylinder** trots att tvärsnittsarean inte är cirkulär.

**SLUT!**