LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA — **LÖSNINGAR**
MATEMATIK — **ANALYS 1**
Helsingborg — **2024-08-30**

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2^x-3}{x^{12}+\ln x-9\cdot 2^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{2^x}+1-\dfrac{3}{2^x}}{\dfrac{x^{12}}{2^x}+\dfrac{\ln x}{2^x}-9} = \dfrac{0+1-0}{0+0-9} = -\dfrac{1}{9}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\pi+0}{1} = \pi$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{\frac{n}{4}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2\cdot 4}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{8}} = e^{\frac{1}{8}}.$

d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}5^{-k} = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}-1}{\dfrac{1}{5}-1} = \dfrac{1}{25}\cdot\dfrac{0-1}{-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{20}.$

2. a) $|z| = \left|\dfrac{(3+4i)2i}{\left(1-i\sqrt{3}\right)}\right| = \dfrac{|3+4i|\cdot|2i|}{\left|1-i\sqrt{3}\right|} = \dfrac{\sqrt{3^2+4^2}\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{5\cdot 2}{2} = 5$

b) För att skriva om talet $-\sqrt{3}+i$ på polär form behöver vi $r = \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2$

då får vi att $-\sqrt{3}+i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

Med hjälp av de Moivres formel beräknar vi

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15} = \left(2e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{15} = 2^{15}e^{\frac{75\pi}{6}i} = 2^{15}\left(\cos\frac{75\pi}{6}+i\sin\frac{75\pi}{6}\right)$$

Vi förenklar vinkeln $\dfrac{75\pi}{6} = \dfrac{72\pi+3\pi}{6} = 12\pi+\dfrac{3\pi}{6} = 6\cdot 2\pi+\dfrac{\pi}{2}$ och får att

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15} = 2^{15}\left(\cos\frac{75\pi}{6}+i\sin\frac{75\pi}{6}\right) = 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{15}i$$

c) Ekvationen $z^2 = -15-8i$.

Sätt $z = a+ib$. Man får då $(a+bi)^2 = -15-8i \Leftrightarrow a^2+2abi-b^2 = -15-8i$.

Jämförelsen och $|a+bi|^2 = |-15-8i|$

(där $|-15-8i| = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$) ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 & (1) \\ 2ab = -8 & (2) \\ a^2 + b^2 = 17 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Insättning i (2) ger $a = 1, b = -4$ och $a = -1, b = 4$

Svar: $z = 1 - 4i,\ z = -1 + 4i$.

3. a)

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

b) $f'(x) = \left(e^{\sin 2x}\right)' = e^{\sin 2x}\cdot\left(\sin 2x\right)' = 2e^{\sin 2x}\cos 2x$

c) $f'(x) = \left(\left(\arctan 3x\right)^2\right)' = 2\arctan 3x\dfrac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3 = \dfrac{6\arctan 3x}{1+9x^2}$

d) $f'(x) = \left(\sqrt{\ln(3x+5)}\right)' = \left(\left(\ln(3x+5)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(\ln(3x+5)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\ln(3x+5)\right)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(3x+5)}}\cdot\frac{1}{3x+5}\cdot 3 = \frac{3}{2(3x+5)\sqrt{\ln(3x+5)}} = \frac{3}{(6x+10)\sqrt{\ln(3x+5)}}$$

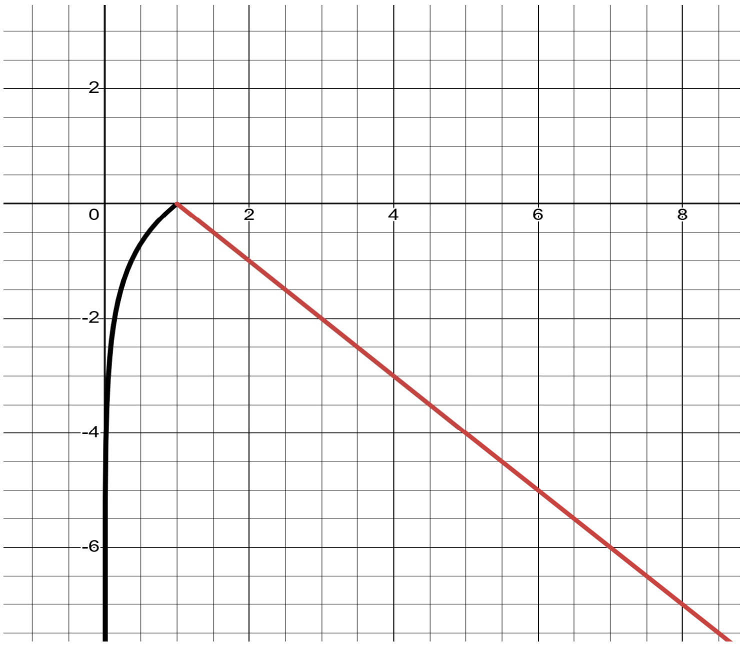
4 a) Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

För att bestämma k använder vi definitionen ovan.

$x = 1: f(1) = \ln 1 = 0$ och $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = \ln 1 = 0$. D v s $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$.

Vi får att $\lim\limits_{x\to 1^+} kx + 1 = k + 1$ måste bli 0, $k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$.

Funktionen blir $y = \begin{cases} \ln x, & x \le 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$



b) Funktionen $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ har $D_f: x>1$

För att bestäm inversen f^{-1} löser vi ut y ur $y=\dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow x-1=\dfrac{2}{y} \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{y}+1$.

Vi får $f^{-1}=\dfrac{2}{x}+1$ med $D_{f^{-1}}: x>0$

c) Funktionen $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ är kontinuerlig i intervallet $0 \le x \le 2$, d v s har största och minsta värde .

$f'(x)=3x^2-12x+9$ och $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x=1, x=3.$
Bara $x=1$ ligger i $0 \le x \le 2$
Vi jämför funktions värde:
$f(0)=-3,\ f(1)=1,\ f(2)=-1$
Vi ser att $f_{\max}=1$ och $f_{\min}=-3$.

5. $y=f(x)=\dfrac{x^2}{25-5x}, \quad D_f=\{x \in R : x \ne 5\}.$

1) En lodrät asymptot kan finns i $x=5$:

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2}{25-5x}=\left(\dfrac{25}{0^-}\right)=-\infty, \quad \lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2}{25-5x}=\left(\dfrac{25}{0^+}\right)=+\infty$. D.v.s. $x=5$ är en lodrät asymptot.

2) Gränsvärden av $f(x)$, då $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{25-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\dfrac{25}{x}-5}=\left(\dfrac{\infty}{0-5}\right)=-\infty, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{25-5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\dfrac{25}{x}-5}=\left(\dfrac{-\infty}{0-5}\right)=+\infty$,

d.v.s inga vågräta asymptoter , då $x \to \pm\infty$

3)Sneda asymptoter $y = kx + m$, då $x \to \pm\infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\cdot(25-5x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{25-5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{25}{x}-5} = -\frac{1}{5},$$

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{25-5x} + \frac{1}{5}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+(5-x)x}{5(5-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{25-5x} = -1$$

D v s $y = -\frac{1}{5}x - 1$är en sned asyptot då $x \to \infty$.

Vi tittar på fallet då $x \to -\infty$, kan finnas en till sned asymptot.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\cdot(25-5x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{25-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{25}{x}-5} = -\frac{1}{5},$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{25-5x} + \frac{1}{5}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+(5-x)x}{5(5-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{25-5x} = -1.$$

Vi får att $y = -\frac{1}{5}x - 1$ är en sned asymptot, då $x \to \pm\infty$

4) $$y' = \left(\frac{x^2}{25-5x}\right)' = \frac{2x(25-5x) - x^2(-5)}{(25-5x)^2} = \frac{50x - 5x^2}{(25-5x)^2} = \frac{5x(10-x)}{(25-5x)^2}.$$

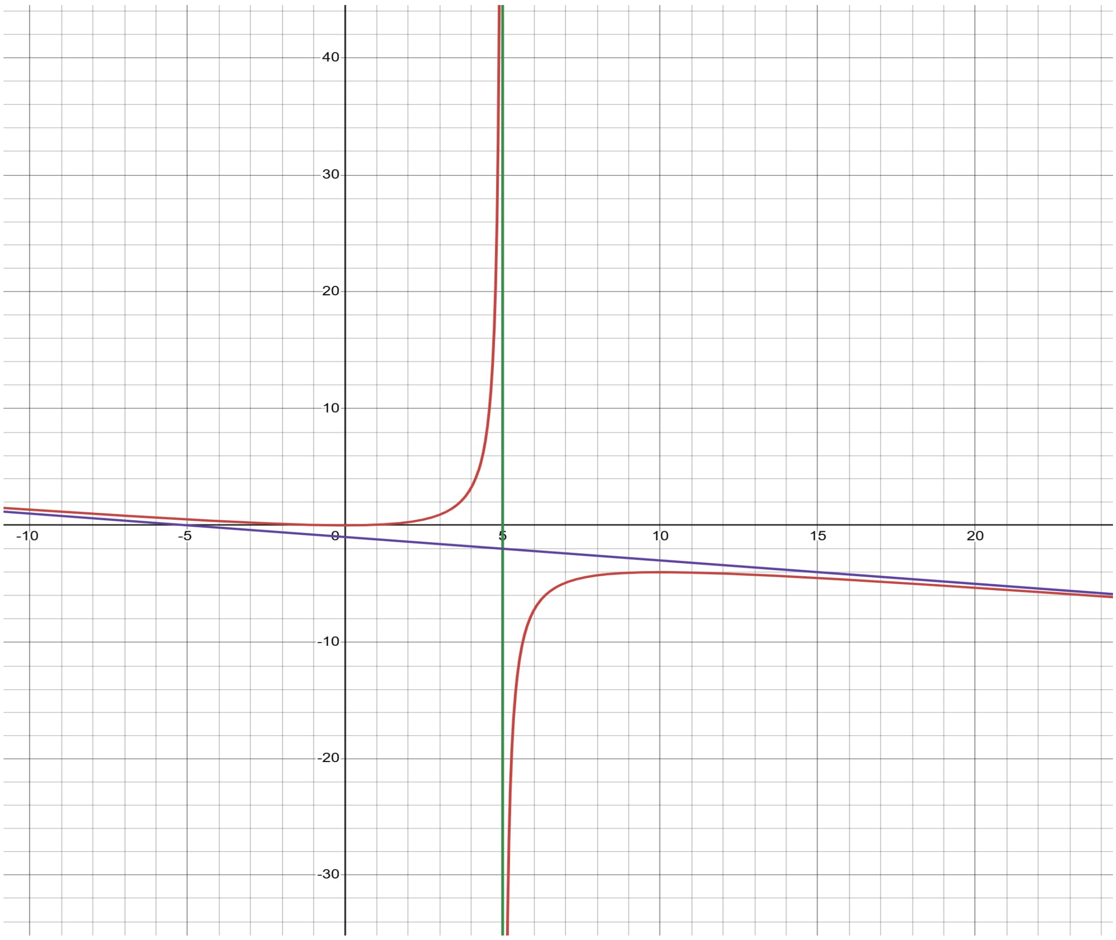
Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x(10-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 10$

5) Teckenschema:

x		0		5		10	
$f'(x)$	+	0	–	odef.	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	-4	$\searrow$

Lokal minimipunkt i $x = 0$, lokal maximum i $x = 10$.

Skärningen med y-axeln: $x = 0$ $y = 0$.



6. $y = 1 - x^2 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad y' = -2x.$

Tangenten i punkten (a, b): $\; y - (1 - a^2) = -2a(x - a).$

Skärning med y-axeln $(x = 0)$: $\; y_0 = 1 - a^2 - 2a(0 - a) = a^2 + 1.$

Skärning med x-axeln $(y = 0)$: $\; 0 - (1 - a^2) = -2a(x_0 - a) \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{a^2 + 1}{2a}.$

Triangelns area blir då $\dfrac{1}{2} x_0 y_0 = \dfrac{(a^2 + 1)^2}{4a} = A(a).$

$$A'(a) = \frac{2(a^2+1)2a \cdot 4a - (a^2+1)^2 \cdot 4}{16a^2} = \frac{(a^2+1)(3a^2-1)}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Men då $a > 0$ får vi $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Teckenschema

a		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$A'(a)$	-	0	+
$A(a)$	$\searrow$	$A(1/\sqrt{3})$	$\nearrow$

Triangelns minsta möjliga area är $\; A(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \cdots = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}.$