LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ANALYS 1**
Helsingborg **2024-04-02**

1. a) $D\ln(4+2x^2) = \dfrac{1}{4+2x^2}\cdot 4x = \dfrac{1}{2(2+x^2)}\cdot 4x = \dfrac{2x}{2+x^2}$

b) $D\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{x^2}{2}\right) = 2(x^{-2})' + \dfrac{1}{2}(x^2)' = -4x^{-3} + \dfrac{1}{2}\cdot 2x = -\dfrac{4}{x^3}+x$

c) $D\left((2-x)^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x\right) = 2(2-x)\cdot(-1)\cos x - (2-x)^2\cdot\sin x + 2\sin x + 2x\cdot\cos x =$
$= -4\cos x + 2x\cdot\cos x - (2-x)^2\cdot\sin x + 2\cdot\sin x + 2x\cdot\cos x =$
$= 4x\cdot\cos x - 4\cos x - (2-x)^2\cdot\sin x + 2\sin x = (4x-4)\cos x - (x^2-4x+2)\sin x$

d) $D\left(e^{5x}+x\right)^3 = 3\left(e^{5x}+x\right)^2\cdot(5e^{5x}+1) = (15e^{5x}+3)\cdot\left(e^{5x}+x\right)^2$

2. a) $z = \left|\dfrac{(2-2i)7i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}\right| = \dfrac{|2-2i|\cdot|7i|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|} = \dfrac{\sqrt{2^2+(-2)^2}\cdot 7}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \dfrac{7\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \dfrac{7\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$.

Arg z $= \arg(2-2i) + \arg(7i) - \arg(1+i\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{12}$ eller $\dfrac{23\pi}{12}$.

b) $z^2 - 6iz - 9 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-3i)^2 - (3i)^2 - 9 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-3i)^2 = -2i$

Sätt $z-3i = a+ib$. Man får då $(a+bi)^2 = -2i \Leftrightarrow a^2 + 2abi + b^2 = -2i$.
Jämförelsen och $|a+bi|^2 = |8-6i|$ ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ 2ab = -2 & (2) \\ a^2 + b^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Insättning i (2) ger $a=1, b=-1$ och $a=-1, b=1$

$z-3i = 1-i \Leftrightarrow z = 1+2i$ *eller* $z-3i = -1+i \Leftrightarrow z = -1+4i$.
Svar: $z = 1-2i$ *eller* $z = -1+4i$

3. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sin 7x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8\cdot 7x}{7\cdot\sin 7x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{7x}{\sin 7x} = \dfrac{8}{7}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3\cdot 2^{-k} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} 3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{2}-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1}{-\dfrac{1}{2}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} -3\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1\right) = -3(0-1) = 3.$ Serien är konvergent med värdet 3.

c) $(1-2x)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot 1^{8-k} \cdot (-2x)^k$.

Eftersom man är intresserad av koeff. för x^5 ser man att $k=5$.

Vi får $\binom{8}{5} \cdot 3^3 \cdot (-2x)^5 = \binom{8}{3} \cdot 27 \cdot (-32)x^5 = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 32\, x^5 = -56 \cdot 32\, x^5 = -1792x^5$.

Svar: -1792.

4. $y = f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$, $D_f = \{x \in R : x \neq 0\}$.

1) $f(x)$ är ej definierad i $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty$. D.v.s. $x = 0$ är en lodrät asymptot.

2) Gränsvärden av $f(x)$, då $x \to \pm\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty^-} \frac{x^3+4}{x^2} = -\infty$, d.v.s inga vågräta asymptoter .

Sneda asymptoter: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x \cdot x^2} = 1$,

$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$.

Vi tittar på $x \to -\infty$, eftersom det kan finnas en sned asymptot till.

$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x \cdot x^2} = 1$, $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x^2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = 0$.

Vi får att $y = x$ är en sned asymptot, då $x \to \pm\infty$

3) $y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$.

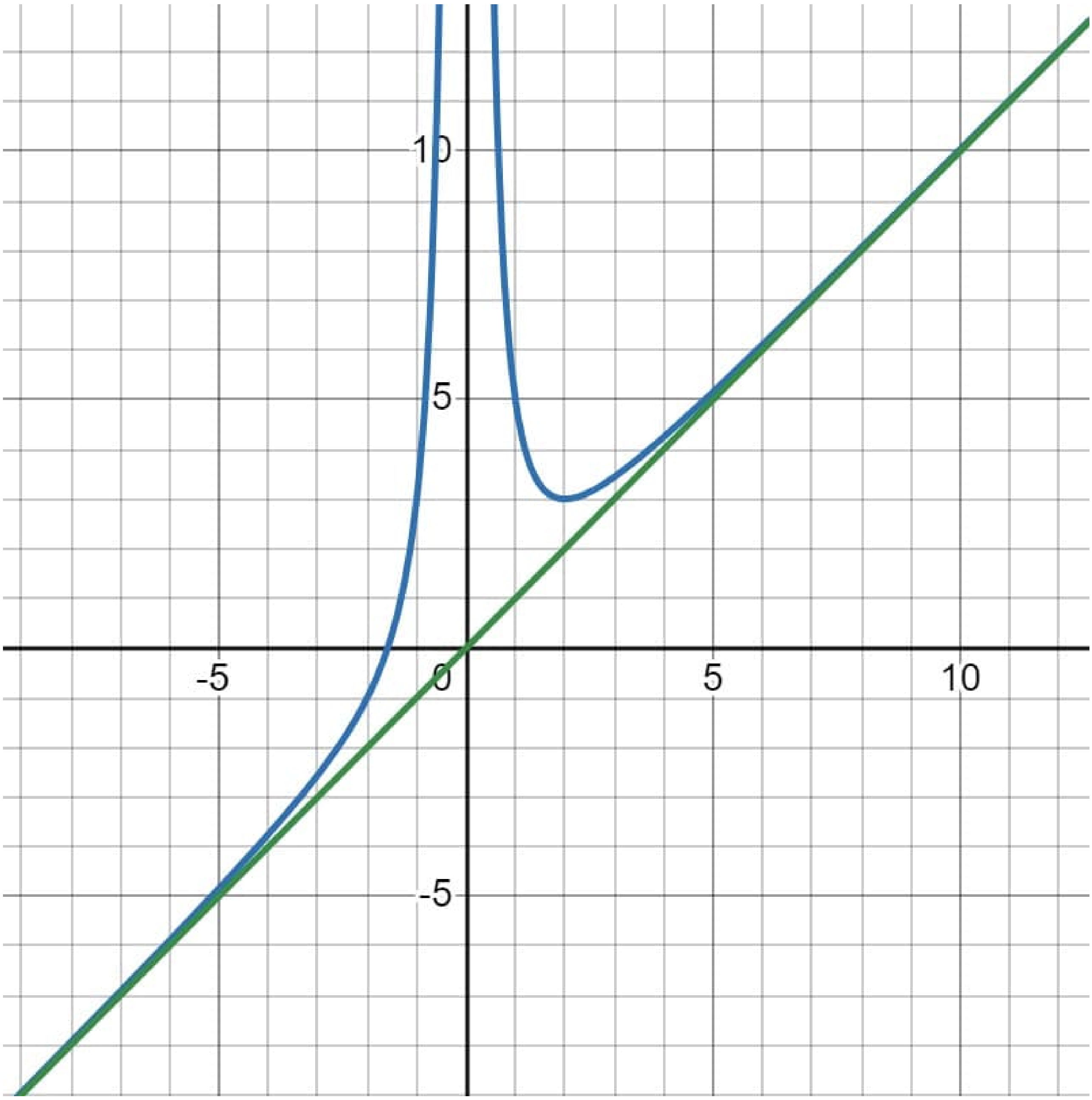
Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Teckenschema:

x		0		2	
$f'(x)$	+	Ej def	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Ej def	$\searrow$	3	$\nearrow$

Lokal minimipunkt i $x = 2$.

Skärningen med x-axeln: $y = 0 : \frac{x^3+4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$.



5. a) Använd hjälpvinkelmetoden

$$-\sin 3x + \cos 3x = A\sin(3x + \delta) = A\cos\delta \cdot \sin 3x + A\sin\delta \cdot \cos 3x\,.$$

Jämförelse ger $\begin{cases} A\sin\delta = 1 \\ A\cos\delta = -1 \end{cases}$. För att bestämma amplituden A

Alt.1: kvadrera och addera ekvationerna, då $A^2 = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$ (ty $A > 0$)

Alt.2: Använd $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\delta = 1 \\ \sqrt{2}\cos\delta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\delta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\delta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ ger fasförskjutningen $\delta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Funktionen kan skrivas $f(x) = -\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

b) $y = 2 + x + \left(1 + x^2\right)\cdot \arctan x$

Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, där $x_0 = 0$ och $y_0 = 2 + 0 + (1+0)\cdot\arctan 0 = 2$.

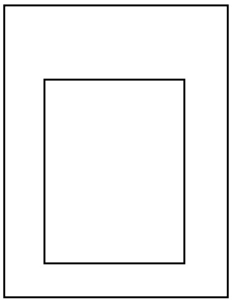
Vi deriverar

$$f'(x) = D(2 + x + (1+x^2)\arctan x) = 1 + 2x\cdot\arctan x + (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} = 2 + 2x\cdot\arctan x$$

och får att $f'(0) = 2$.

Insättning i tangentens ekvation ger $y - 2 = 2\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 2x + 2$.

6.



Bildarean är $A_b = xy$ och affischarean är $(x+2)(y+3) = 4800$. Man får

$A_b(x) = x\left(\dfrac{4800}{x+2} - 3\right) = \dfrac{4800x}{x+2} - 3x$. $A_b{}'(x) = \dfrac{2\cdot 4800 - 3(x+2)^2}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 40\sqrt{2}$

eller $x = -2 - 40\sqrt{2} < 0$ (falsk).

$A_b''\left(-2 + 40\sqrt{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x = -2 + 40\sqrt{2}$ lokal maximipunkt.

Störst bildarea får vi om $x = -2 + 40\sqrt{2}$ och $y = -3 + 60\sqrt{2}$.