LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA | **Lösningar**
MATEMATIK | **ANALYS 1**
Helsingborg | **2023-08-25**

1. a) $\left|\dfrac{3i}{1+i\sqrt{3}}\right| = \dfrac{|3i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \dfrac{3}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \dfrac{3}{2}$.

$$\arg\frac{3i}{1+i\sqrt{3}} = \arg 3i - \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Eftersom $|z| = 2$ och $\arg z = \dfrac{9\pi}{4}$ så kan vi skriva

$$z = 2e^{\frac{9\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,.$$

c) $(1+i)^{16} = \left((1+i)^2\right)^8 = \left(1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2\right)^8 = (2i)^8 = 2^8 i^8 = 2^8(i^2)^4 = 2^8(-1)^4 = 2^8 = 256$.

d) $e^{\left(\ln 6 + i\frac{\pi}{6}\right)} = e^{\ln 6}e^{i\frac{\pi}{6}} = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 3i$.

2. a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1+5x^3+x^{12}}{x^{12}-2x+12^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{12^x} + \dfrac{5x^3}{12^x} + \dfrac{x^{12}}{12^x}}{\dfrac{x^{12}}{12^x} - \dfrac{2x}{12^x} + \dfrac{12^x}{12^x}} = \frac{0+0+0}{0-0+1} = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{8n} = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^4 = e^4$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5x}{5x\cdot(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5\cdot x}{e^x-1} = 5\,.$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 5x}{e^x-1} = \left(\frac{begr.funktion}{\infty}\right) = 0\,.$$

3. a) $\sum_{k=3}^{22} 2^k + \sum_{k=2}^{23} 3^{-k} = 2^3 \frac{2^{20}-1}{2-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{22}-1}{\frac{1}{3}-1} = 2^3(2^{20}-1) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^{22}}-1\right)$ Sedan kan man

förenkla på olika sätt, t ex $2^{23}-8-\frac{1}{6\cdot 3^{22}}+\frac{1}{6} = 2^{23}-\frac{1}{6\cdot 3^{23}}-\frac{47}{6} = 2^{23}-\frac{1}{2\cdot 3^{23}}-\frac{47}{6}$.

b) Använd hjälpvinkelmetoden
$3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = A\sin(3x+\varphi) = A\sin\varphi \cdot \cos 2x + A\cos\varphi \cdot \sin 2x$.

Jämförelse ger $\begin{cases} A\sin\varphi = 3 \\ A\cos\varphi = \sqrt{3} \end{cases}$.

Vi bestämmer amplituden $A = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Ekvationssystemet blir

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin\varphi = 3 \\ 2\sqrt{3}\cos\varphi = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\varphi = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$ ger fasförskjutningen $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Funktionen kan skrivas $f(x) = 3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

4. a) Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Vi bestämmer y_0 då $x_0 = 1$: $y_0 = \frac{e^{1-1}}{1^2+3} = \frac{1}{4}$

Vi deriverar $y' = f'(x) = \frac{(e^{1-x})' \cdot (x^2+3) - e^{1-x}(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{-e^{1-x}(x^2+3) - e^{1-x} \cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

och får $f'(x) = \frac{-e^{1-x}(x^2+2x+3)}{(x^2+3)^2}$ som ger att $f'(x_0) = f'(1) = -\frac{3}{8}$.

Tangentens ekvation blir $y - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{8}x + \frac{5}{8}$

b) Derivera $f(x) = \ln\frac{(x^2-1)^2}{\sqrt{1+x}}$, men förenkla först!

$$f(x) = \ln\frac{(x^2-1)^2}{\sqrt{1+x}} = \ln(x^2-1)^2 - \ln\sqrt{1+x} = 2\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}\ln(1+x).$$

Nu blir det mycket trevligare att derivera

$$f'(x) = 2(\ln(x^2-1))' - \frac{1}{2}(\ln(1+x))' = \frac{2}{x^2-1}2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{4x}{x^2-1} - \frac{1}{2(1+x)}.$$

Vi löser ekvationen $f'(x) = 0$: $\frac{4x}{x^2-1} - \frac{1}{2(1+x)} = 0$, där $x \neq \pm 1$

Alt1: $\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{1}{2(1+x)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{1}{2(1+x)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{8x-(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow 8x-(x-1)=0 \Leftrightarrow 7x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{7}$

Alt2: $\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{1}{2(1+x)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2(1+x)} \Leftrightarrow 4x\cdot 2(1+x)=x^2-1 \Leftrightarrow 7x^2+8x+1=0$

Man får två rötter $x=-\dfrac{1}{7}$ och $x=-1$(en falsk rot).

Svar: $x=-\dfrac{1}{7}$

5. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, där $x\neq 1$

1. En lodrät asymptot kan finnas i $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\left(\dfrac{1}{(0^+)^2}=\dfrac{1}{0^+}\right)=\infty$ och $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\left(\dfrac{1}{(0^-)^2}=\dfrac{1}{0^+}\right)=\infty$,

d v s $x=1$ är en lodrät asymptot

2. Vågräta asymptoter: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=-\infty$, d v s inga vågräta asympoter.

3. Sneda asymptoter:

Alt1: Polynomdivision ger $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2+\dfrac{4x-3}{x^2-2x+1}$

För stora positiva och stora negativa x termen $\dfrac{4x-3}{x^2-2x+1}\to 0$, så $y\approx x+2$.

D v s $y=x+2$ är en sned asymptot då $x\to\infty$ och $x\to-\infty$

Alt2: Sned asymptot har ekvationen $y=kx+m$, där

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=1$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2$

Vi får $y=x+2,\ x\to\infty$

Vi tittar på fallet $x\to-\infty$:

$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=1$

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2$

En sned asymptot $y=x+2,\ x\to\infty$ och $x\to-\infty$

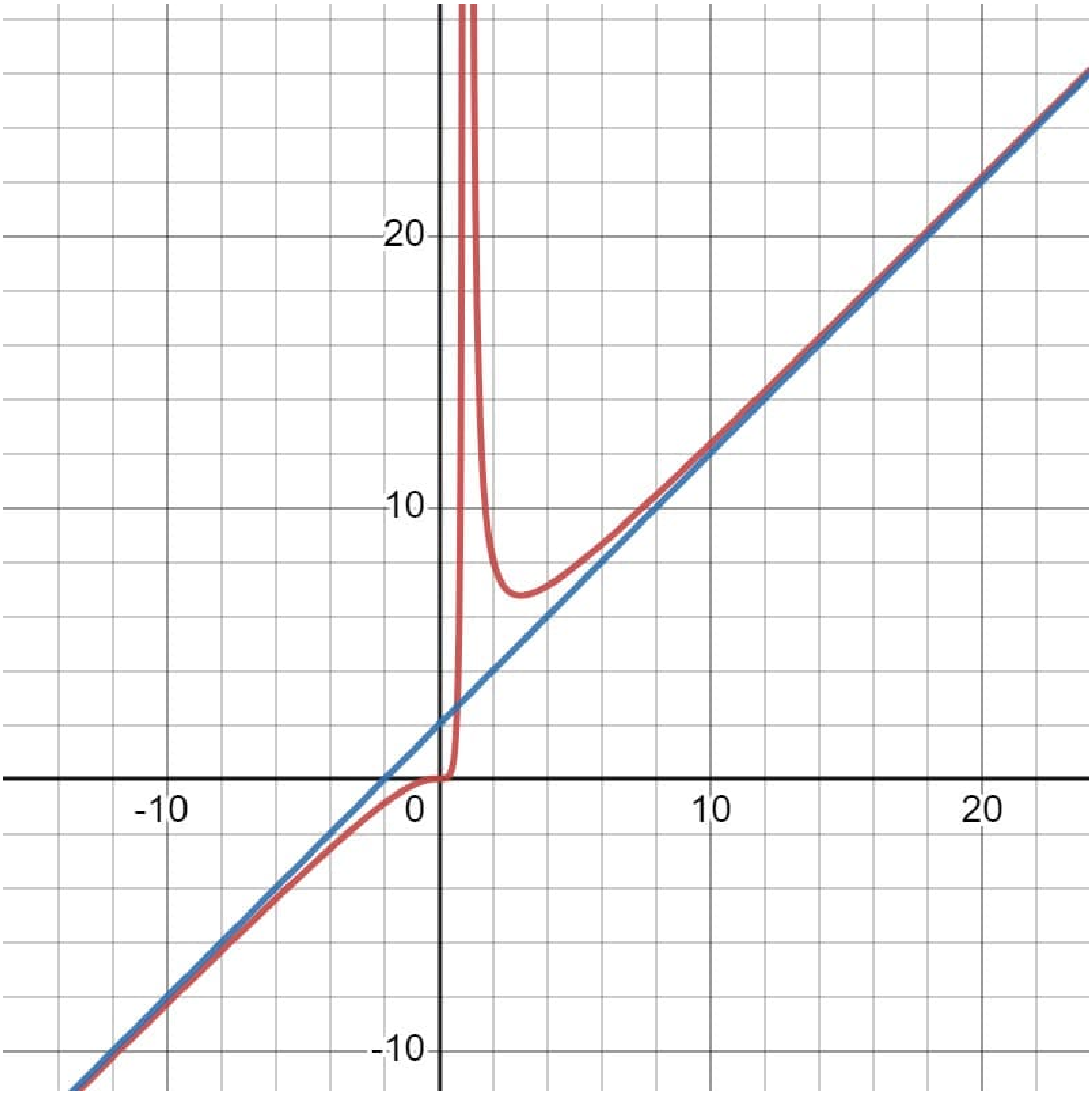
4. Derivera $f'(x)=D\dfrac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{(x-1)\cdot(3x^2(x-1)-2x^3)}{(x-1)^4}=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

5. Derivatans nollställen: $f'(x) = 0$ $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 3$

Teckenschema

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	-	odef.	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↗	odef	↘	27/4	↗

Lokal minimipunkt i $x = 3$ och terrass i $x = 0$.



6. $(z+1)^6-(z-1)^6=0 \Leftrightarrow \left((z+1)^3\right)^2-\left((z-1)^3\right)^2=0$, vi använder konjugatregeln:

$\left((z+1)^3-(z-1)^3\right)\cdot\left((z+1)^3+(z-1)^3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left((z^3+3z^2+3z+1)-(z^3-3z^2+3z-1)\right)\cdot\left((z^3+3z^2+3z+1)+(z^3-3z^2+3z-1)\right)=0 \Leftrightarrow$

Förenkla och få $\left(6z^2+2\right)\cdot\left(2z^3+6z\right)=0 \Leftrightarrow 12z^5+40z^3+12z=0 \Leftrightarrow 12z\left(z^4+\frac{10}{3}z^2+1\right)=0$

En rot $z=0$, resten får vi från ekvationen $z^4+\frac{10}{3}z^2+1=0$.

Sätt $z=t$: $t^2+\frac{10}{3}t+1=0 \Leftrightarrow t=-3$ eller $t=-\frac{1}{3}$.

Alltså $z^2=-3 \Leftrightarrow z=\pm i\sqrt{3}$ och $z^2=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow z=\pm i\frac{1}{\sqrt{3}}$

Svar: $z=0$, $z=\pm i\sqrt{3}$, $z=\pm i\frac{1}{\sqrt{3}}$.