LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA | **SVAR OCH ANVISNINGAR**
MATEMATIK | **ANALYS 1**
Helsingborg | **2023-01-13**

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6+4x-2}{x^4-x^3+2^x}=\dfrac{-2}{1}=-2$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+4x-2}{x^4-x^3+2^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^6}{2^x}+\dfrac{4x}{2^x}-\dfrac{2}{2^x}}{\dfrac{x^4}{2^x}-\dfrac{x^3}{2^x}+\dfrac{2^x}{2^x}}=\dfrac{0}{1}=0$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sin 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cdot 2x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}4\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}=4\cdot 1=4$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}2\arctan x=\left(\arctan x\to\dfrac{\pi}{2},\text{då } x\to\infty\right)=2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$,

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

2. a) $\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1+i$

b) $(1+i\sqrt{3})^9=\left(r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2\right)=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^9=2^9\cdot e^{\frac{9\pi}{3}i}=2^9\cdot e^{3\pi i}=$

$=\left|3\pi=2\pi+\pi\right|=2^9\cdot e^{\pi i}=2^9(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^9$

c) $(2-i)z^2=2+29i\Leftrightarrow z^2=\dfrac{2+29i}{2-i}\Leftrightarrow z^2=-5+12i$

Sätt $z=x+iy$ vi får $x^2+i2xy-y^2=-5+12i$

Jämförelse ger $\begin{cases}x^2-y^2=-5 & (1)\\ 2xy=12 & (2)\\ x^2+y^2=13 & (3)\end{cases}$

(1)+(3) ger $2x^2=8\Leftrightarrow x=\pm 2$. Insättning i (2) ger $x=2,\ y=3$ och $x=-2,\ y=-3$.

Svar: $z=2+3i$, $z=-2-3i$.

3. a) $\arccos 2x=\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

b) $f(x)=2\sqrt{x}+\arctan 2x$, $f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2=x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{1+4x^2}$.

Vi sätter $x=1$ in i $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{1+4x^2}$. Det blir $f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{2}{1+4\cdot 1^2}=\dfrac{7}{5}$.

c) $f(x)=(\sin x)^2+\cos x$, derivera $f'(x)=2\sin x\cdot\cos x-\sin x$.

Det går att lösa ekvationen $f'(x)=0$ på två olika sätt.

Alt 1. $f'(x)=0$. Ekvationen blir $2\sin x\cdot\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$.
Detta ger att

$\sin x=0 \Leftrightarrow x=n\pi,\ n\in Z$ eller $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+n2\pi,\ n\in Z$

Svar: $x=n\pi$ eller $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+n2\pi,\ n\in Z$

Alt 2. $f'(x)=0$: Vi använder omskrivning $2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$, då får vi $f'(x)=\sin 2x-\sin x$. Vi löser ekvationen $\sin 2x-\sin x=0$, vi får
$\sin 2x=\sin x \Leftrightarrow 2x=x+n2\pi,\ n\in Z \Leftrightarrow x=n2\pi$

eller $2x=\pi-x+n2\pi \Leftrightarrow 3x=\pi+n2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n2\pi}{3},\ n\in Z$

Svar: $x=n2\pi$ eller $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n2\pi}{3},\ n\in Z$

4. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}\quad D_f=\{x\in R: x\neq 2\}$.

1) Vi undersöker diskontinuitets punkter: $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=\left(\dfrac{3^2}{0^+}\right)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=\left(\dfrac{3^2}{0^-}\right)=-\infty$, dvs $x=2$ är en lodrät asymptot.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty},\dfrac{(x+1)^2}{x-2}\approx\dfrac{x^2}{x}=x \text{ för stora x}\right)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=-\infty$, dvs inga vågräta asymptoter.

3) Sneda asymptoter $y=kx+m,\quad x\to\pm\infty$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{(x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x}=1.$$

$$m=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

Vi får samma värden på k och m då $x\to-\infty$.

D v s $y=x+4,\quad x\to\pm\infty$ är en sned asymptot.

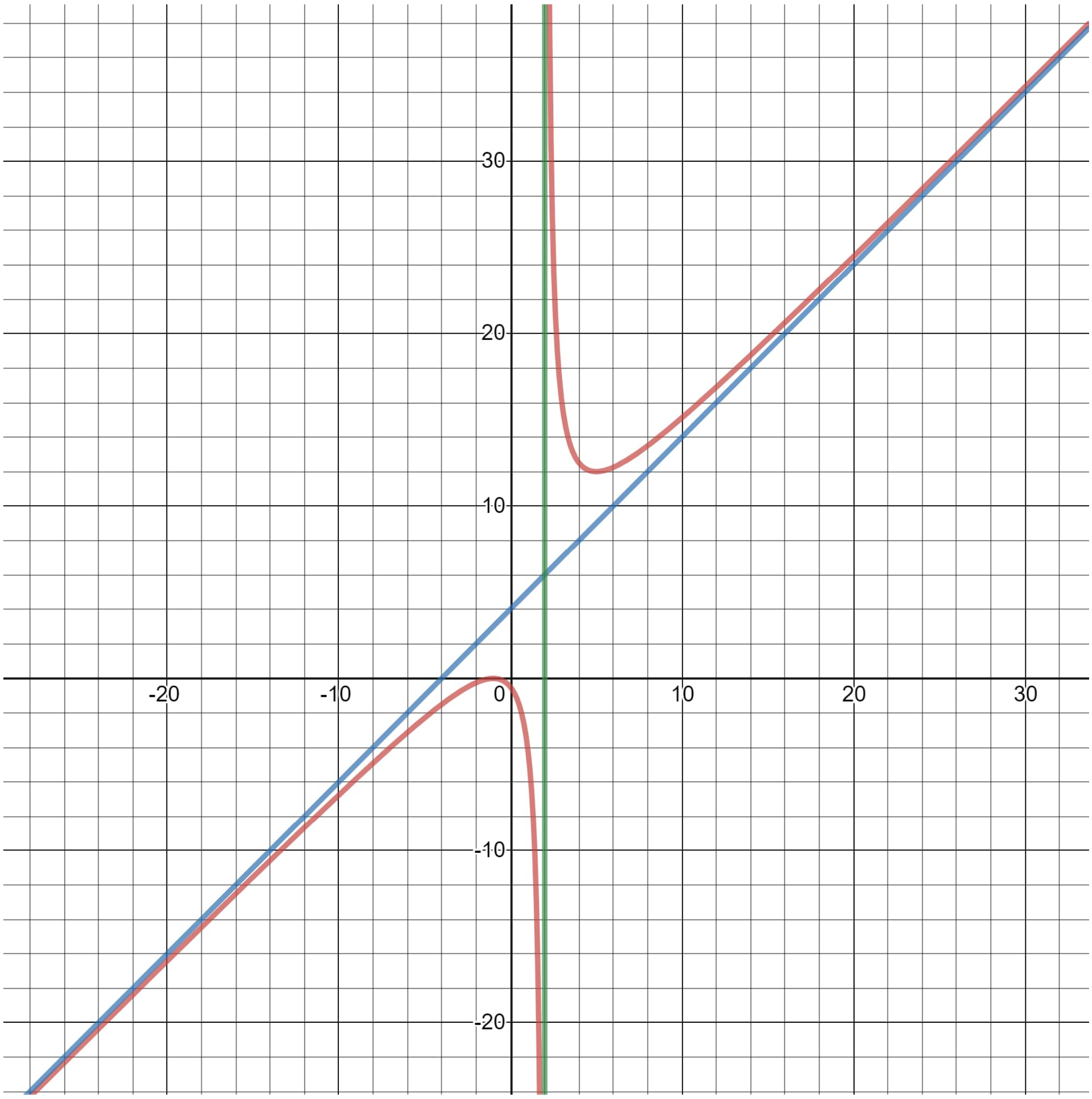
4) $$y'=\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}\right)'=\frac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x+1)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$$

Stationära punkter: $f'(x)=0\quad \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=5,\ x=-1$.

x		-1		2		5	
$f'(x)$	+		-	odef	–		+
$f(x)$	↗	l.max	↘	odef	↘	l.min	↗

Lokal maximipunkt i $x = -1,\ y = 0$. Lokal minimipunkt i $x = 5,\ y = 12$

Skärningen med y -axeln: $x = 0,\ y = -\frac{1}{2}$.



5. a) Derivatans definition: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Eftersom $f(x) = \ln x$ så får vi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \left(typ \frac{0}{0}, \text{ vi kan använda } \frac{\ln(t+1)}{t} \to 1, t \to 0 \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Alltså $D \ln x = \frac{1}{x}$.

b) Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Normalens ekvation är $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$, där $x_0 = 0$ och

$y_0 = (0-2)e^0 + 3 = 1$. Vi bestämmer

$$f'(x) = \left((x^3 - 2)e^{-x} + 3\right)' = 3x^2 \cdot e^{-x} - (x^3 - 2)e^{-x} = e^{-x}\left(3x^2 - (x^3 - 2)\right) = e^{-x}\left(3x^2 - x^3 + 2\right)$$

$\Rightarrow \quad f'(0) = e^0(0 - 0 + 2) = 2$.

Insättning i ekvationen för tangenten: $y - 1 = 2 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$

Normalen blir $y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$.

6. $E(v) = k\frac{1}{v}((v-35)^2 + 296) = k\left(v - 70 + \frac{1521}{v}\right)$

$E'(v) = k\left(1 - \frac{1521}{v^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1521}{v^2} = 0 \Leftrightarrow v^2 = 1521$ Detta ger $v = 39$ km/h (v > 0)

Vi testar om energiförbrukning är minst då $v = 39$ km/h.

Man kan använda ett teckenschema eller andraderivata.

Vi deriverar en gång till:

$$E''(v) = k\left(1 - \frac{1521}{v^2}\right)' = k\left(1 - 1521v^{-2}\right)' = k\frac{2 \cdot 1521}{v^3}$$

$E''(39) = k\frac{3042}{39^3} > 0$ detta ger att vid 39 km/h har E ett lokalt minimum.

Svar: Energiförbrukningen är lägst då $v = 39$ km/h.

SLUT!