**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA** **LÖSNINGAR**
**MATEMATIK** **ANALYS 1**
**Helsingborg** **2024-01-12**

**1.** a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+3x)}{3x} = \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\ln(1+3x)}{3x} = 3$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$, ty $\ln(1+3x) < x$ för "stora $x$"

c) $\lim_{x\to\infty} 1 + e^{\frac{1}{2x}} = \left(1 + e^{\frac{1}{\infty}}\right) = 1 + e^0 = 2$

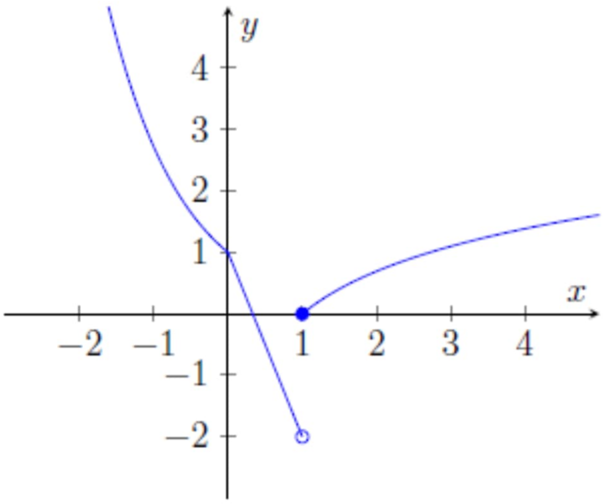
d) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} (x+4) = 8.$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+5}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+5}\right)} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x - (x+5)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+5}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+5}\right)} = \left(\frac{-5}{\infty}\right) = 0\,.$

**2** a) Vi ritar kurvan

$$y = \begin{cases} e^{-x} & , x \le 0 \\ 1 - 3x & , 0 < x < 1 \\ \ln x & , x \ge 1 \end{cases}$$




Funktionen är diskontinuerlig i $x = 1$.

b) Normalens ekvation $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

$$x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = 4 \cdot \arctan 2 \cdot \frac{1}{2} = 4\arctan 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi\ .$$

$$f'(x) = D(4 \cdot \arctan 2x) = 4\frac{2}{1+4x^2} = \frac{8}{1+4x^2}\ .$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \pi\right) \text{ ger } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{1+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{8}{2} = 4\,.$$

Insättning i normalens ekvation ger

$$y - \pi = -\frac{1}{4}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} + \pi.$$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2^3)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8^k = \lim_{n\to\infty} 8\frac{8^n-1}{8-1} = \lim_{n\to\infty} 8\frac{8^n-1}{7} = \infty \Rightarrow$ divergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty}(3^{-2})^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1}{\frac{1}{9}-1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{0-1}{-\frac{8}{9}} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

Svar: $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k}$ är konvergent med summan $\frac{1}{8}$.

**3.** a) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Vi bestämmer $r = |z| = \left|-\sqrt{75} + 5i\right| = \sqrt{(-\sqrt{75})^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10$

$$z = 10\left(\frac{-\sqrt{75}}{10} + \frac{5}{10}i\right) = 10\left(\frac{-5\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{2}i\right) = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Jämförelse ger

$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vi får att $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Talet $z$ på polär form blir $z = 10e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

b) $z^2 + 6i - 8 = 0$. Sätt $z = a + ib.$

Man får då $(a+ib)^2 + 6i - 8 = 0 \Leftrightarrow (a+ib)^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 8 - 6i$ .

Jämförelse och beräkning av ekvation (3)

$$\left|(a+bi)^2\right| = |8-6i| \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{100} = 10 .$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=8 & (1) \\ 2ab=-6 & (2) \\ a^2+b^2=10 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2 = 18 \Leftrightarrow a = \pm 3$ . Insättning i (2) ger $a=3, b=-1$ och $a=-3, b=1$.

Då har vi att $z = 3-i$ och $z=-3+i$ .

c) Ekvationen $z^4+4z^3+10z^2+12z+5=0$ har dubbelrot $z=-1$, d v s $z_1=-1$ och $z_2=-1$

För att bestämma resterande två rötterna gör vi polynomdivision
$z^4+4z^3+10z^2+12z+5$ med $(z-z_1)\cdot(z-z_2) = (z-(-1))(z-(-1)) = (z+1)^2 = z^2+2z+1$

Polynomdivision med $z^2+2z+1$ ger $z^2+2z+5$.

Vi löser ekvationen $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{-4} = -1\pm 2i$ .

Nu har vi alla fyra rötter: dubbelrot $z=-1$ och $z=-1\pm 2i$ .

**4.** $y = 2+\dfrac{x^2}{x^2-4}$ , $D_f = \{x; x \neq \pm 2\}$ .

1) I $x=\pm 2$ kan finnas lodräta asymptoter

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \text{ och } \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$$

D v s $x=\pm 2$ är två lodräta asymptoter.

2) Vi börjar att titta om det finns vågräta asymptoter då $x\to\pm\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ och $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$. Alltså är $y=3$ en vågrät asymptot då $x\to\pm\infty$.

3) Vi deriverar $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$

4) Bestämmer stationära punkter igenom att lösa ekvationen $f'(x)=0$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x=0.$$

5) Teckenschemat blir

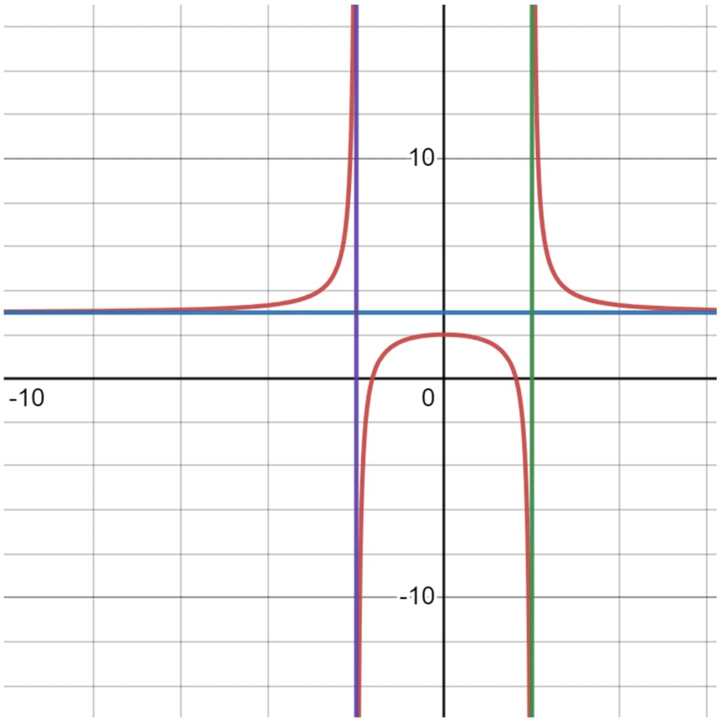
| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | odef | + | 0 | - | odef | - |
| $f(x)$ | ↗ | odef | ↗ | 2 | ↘ | odef | ↘ |

.

Lokal maximipunkt i $x = 0$.

Skärning med x-axeln i $x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ , $y = 0$.

Skärning med y-axeln i $x = 0$ , $y = 2$.




**5.** a) Vi deriverar implicit $x^3 - 3x^2 y + y^3 = 3$.

$(x^3 - 3x^2 y + y^3)' = 3' \Leftrightarrow 3x^2 - (6xy + 3x^2 y') + 3y^2 y' = 0$.

Vi löser ut $y'(x)$:

$$3x^2-6xy-3x^2y'+3y^2y'=0 \Leftrightarrow -3x^2y'+3y^2y'=6xy-3x^2 \Leftrightarrow y'(3y^2-3x^2)=6xy-3x^2$$

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{6xy-3x^2}{3y^2-3x^2}$. Förkorta med 3: $y'=\dfrac{2xy-x^2}{y^2-x^2}$

Vi ska bestämma $y'(1)$ om $y(1)=2$ Sätt in i $y'(x)$ $y=2,\ x=1$, vi får $y'(1)=1$

b) Visa olikheten $\ln x \geq \dfrac{2(x-1)}{x+1}, \quad x\geq 1.$

Efter omskrivning får vi $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}\geq 0$, $x\geq 1$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$$

Vi ser direkt att $f'(x)>0$ för $x>1$.

Eftersom dessutom $f(1)=0$ och $f(x)$ är kontinuerlig i $x=1$ har vi nu visat

att $f(x)\geq 0$ för $x\geq 1$.

Alltså är $\ln x \geq \dfrac{2(x-1)}{x+1}\geq 0,\ x\geq 1.$

**6.** Vi inför beteckningarna: triangelsida = $x$ och ett uttryck för det totala pappåtgången är $P(x)$

Vi måste bilda en funktion för papåtgången. Om vi förutsätter att förpackningen har lock (dumt annars eller hur?) består ju $P(x)$ av tre rektangelsidor och två triangelytor.

Om vi betecknar basytan $B(x)$ och höjden på förpackningen $H$ så får vi

$$P(x)=2B(x)+3x\cdot H$$

Basytan är arean av en liksidig triangel och vi vet att i en liksidig triangel alla vinklar är $\dfrac{\pi}{3}$.

Basytan $B(x)=\dfrac{x\cdot h}{2}$, höjden i den liksidiga triangeln $h=x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, då får vi

$$B(x)=\frac{x\cdot x\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Volymen är bestämd till $4\ \text{dm}^3$. Volymen= Basytan gånger höjden= $B(x)\cdot H$

Volymen är $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=4$, vi löser ut $H$: $H=\dfrac{4}{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{16}{x^2\sqrt{3}}$ .

Totala arean (pappåtgången) blir då

$$P(x) = 2\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3x\frac{16}{x^2\sqrt{3}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{16\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{16}{x}\right)$$

För att hitta minsta möjliga $P(x)$ bör vi så klart derivera denna funktion:

$$P'(x) = \frac{2x\sqrt{3}}{2} + 16\sqrt{3}(-x^{-2}) = x\sqrt{3} - \frac{16\sqrt{3}}{x^2} = \frac{x^3\sqrt{3} - 16\sqrt{3}}{x^2}.$$

Nollställen $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3\sqrt{3} - 16\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 16 = 0$ ger oss endast en reell lösning,

$$x = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Vi gör teckenschemat och får inte glömma att $x$ är triangelsida, d v s $x > 0$

| x | | $2\sqrt[3]{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $P(x)$ | $\searrow$ | Lok. min | $\nearrow$ |

Vi ser att $2\sqrt[3]{2}$ är verkligen ett minimum.

Eftersom man frågar också efter cylinderns höjd utför vi följande beräkning:

$$H = \frac{16}{(2\sqrt[3]{2})^2\sqrt{3}} = \frac{16}{2^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^4}{2^{2+\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}.$$

Svar: för papåtgångeni får den minimala papåtgången om triangelsidan är $2\sqrt[3]{2}$
och cylinderns höjd $\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$.