

$$1. a) D \ln(4 + 2x^2) = \frac{1}{4 + 2x^2} \cdot 4x = \frac{1}{2(2 + x^2)} \cdot 4x = \frac{2x}{2 + x^2}$$

$$b) D \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2} \right) = 2(x^{-2})' + \frac{1}{2}(x^2)' = -4x^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 2x = -\frac{4}{x^3} + x$$

$$c) D((2-x)^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x) = 2(2-x) \cdot (-1) \cos x - (2-x)^2 \cdot \sin x + 2 \sin x + 2x \cdot \cos x = \\ = -4 \cos x + 2x \cdot \cos x - (2-x)^2 \cdot \sin x + 2 \sin x + 2x \cdot \cos x = \\ = 4x \cdot \cos x - 4 \cos x - (2-x)^2 \cdot \sin x + 2 \sin x = (4x-4) \cos x - (x^2-4x+2) \sin x$$

$$d) D(e^{5x} + x)^3 = 3(e^{5x} + x)^2 \cdot (5e^{5x} + 1) = (15e^{5x} + 3) \cdot (e^{5x} + x)^2$$

$$2. a) z = \frac{(2-2i)7i}{(1+i\sqrt{3})} = \frac{|2-2i| \cdot |7i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2^2+(-2)^2} \cdot 7}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \frac{7\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}.$$

$$\text{Arg } z = \arg(2-2i) + \arg(7i) - \arg(1+i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} \text{ eller } \frac{23\pi}{12}.$$

$$b) z^2 - 6iz - 9 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-3i)^2 - (3i)^2 - 9 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-3i)^2 = -2i$$

$$\text{Sätt } z-3i = a+ib. \text{ Man får då } (a+bi)^2 = -2i \Leftrightarrow a^2 + 2abi + b^2 = -2i.$$

Jämförelsen och $|a+bi|^2 = |-2i|$ ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ 2ab = -2 & (2) \\ a^2 + b^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(3) \text{ ger } 2a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1. \text{ Insättning i (2) ger } a=1, b=-1 \text{ och } a=-1, b=1$$

$$z-3i = 1-i \Leftrightarrow z = 1+2i \text{ eller } z-3i = -1+i \Leftrightarrow z = -1+4i.$$

Svar: $z = 1+2i$ eller $z = -1+4i$

$$3. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\sin 7x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot 7x}{7 \cdot \sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{7} \cdot \frac{7x}{\sin 7x} = \frac{8}{7}$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -3 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right) = -3(0-1) = 3. \text{ Serien är konvergent med värdet 3.}$$

$$c) (1-2x)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \cdot 1^{8-k} \cdot (-2x)^k.$$

Eftersom man är intresserad av koeff. för x^5 ser man att $k = 5$.

$$\text{Vi får } \binom{8}{5} \cdot 3^3 \cdot (-2x)^5 = \binom{8}{3} \cdot 27 \cdot (-32)x^5 = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 32 x^5 = -56 \cdot 32 x^5 = -1792x^5.$$

Svar: -1792 .

$$4. y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

1) $f(x)$ är ej definierad i $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty. \text{ D.v.s. } x = 0 \text{ är en lodrät asymptot.}$$

2) Gränsvärden av $f(x)$, då $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = -\infty, \text{ d.v.s inga vågräta asymptoter.}$$

$$\text{Snedasymptoter: } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x \cdot x^2} = 1,$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Vi tittar på $x \rightarrow -\infty$, eftersom det kan finnas en sned asymptot till.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x \cdot x^2} = 1, \quad m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Vi får att $y = x$ är en sned asymptot, då $x \rightarrow \pm\infty$

$$3) y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}.$$

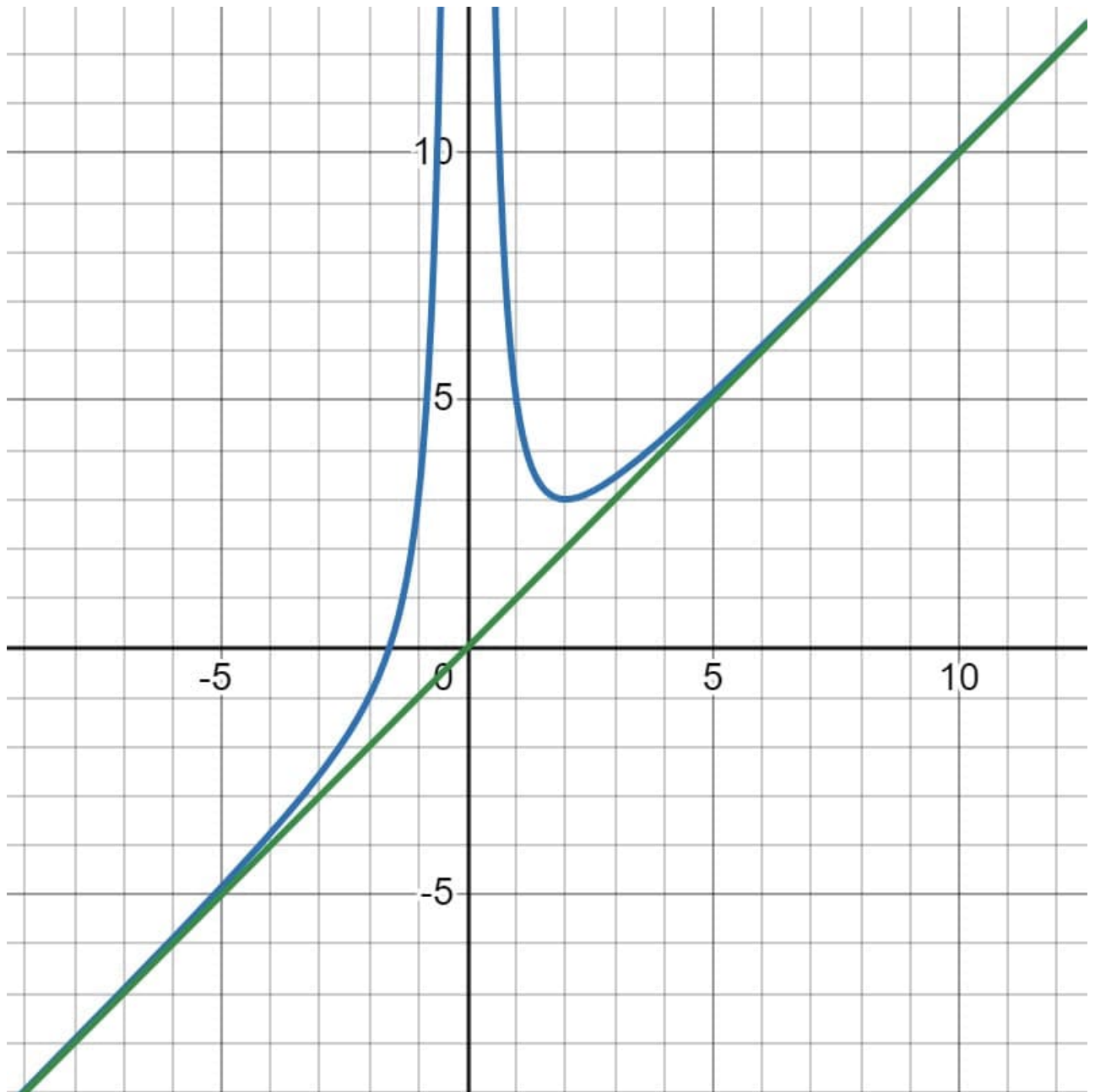
$$\text{Stationära punkter: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Teckenschema:

x		0		2	
$f'(x)$	+	Ej def	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	Ej def	\searrow	3	\nearrow

Lokal minimipunkt i $x = 2$.

$$\text{Skärningen med x-axeln: } y = 0: \frac{x^3 + 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}.$$



5. a) Använd hjälpvinkelmetoden

$$-\sin 3x + \cos 3x = A \sin(3x + \delta) = A \cos \delta \cdot \sin 3x + A \sin \delta \cdot \cos 3x.$$

Jämförelse ger $\begin{cases} A \sin \delta = 1 \\ A \cos \delta = -1 \end{cases}$. För att bestämma amplituden A

Alt.1: kvadrera och addera ekvationerna, då $A^2 = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$ (ty $A > 0$)

Alt.2: Använd $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin \delta = 1 \\ \sqrt{2} \cos \delta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \delta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ger fasförskjutningen } \delta = \frac{3\pi}{4}.$$

Funktionen kan skrivas $f(x) = -\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

b) $y = 2 + x + (1 + x^2) \cdot \arctan x$

Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, där $x_0 = 0$ och

$$y_0 = 2 + 0 + (1 + 0) \cdot \arctan 0 = 2.$$

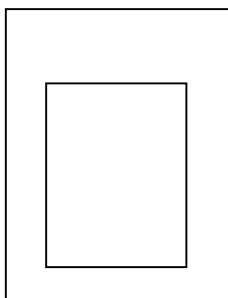
Vi deriverar

$$f'(x) = D(2 + x + (1 + x^2) \arctan x) = 1 + 2x \cdot \arctan x + (1 + x^2) \frac{1}{1 + x^2} = 2 + 2x \cdot \arctan x$$

och får att $f'(0) = 2$.

Insättning i tangentens ekvation ger $y - 2 = 2 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2$.

6.



Bildarean är $A_b = xy$ och affischarean är $(x + 2)(y + 3) = 4800$. Man får

$$A_b(x) = x \left(\frac{4800}{x+2} - 3 \right) = \frac{4800x}{x+2} - 3x. \quad A_b'(x) = \frac{2 \cdot 4800 - 3(x+2)^2}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 40\sqrt{2}$$

eller $x = -2 - 40\sqrt{2} < 0$ (falsk).

$$A_b''(-2 + 40\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow x = -2 + 40\sqrt{2} \text{ lokal maximipunkt.}$$

Störst bildarea får vi om $x = -2 + 40\sqrt{2}$ och $y = -3 + 60\sqrt{2}$.