LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

SVAR OCH LÖSNINGAR
ALGEBRA
2020-10-24

1. $\dfrac{a-b}{a}$

2. $\dfrac{14-7\sqrt{2}}{14} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}.$

3. $3^3 = 27$

4. $x \le 1$ eller $x \ge 7.$

5. $6\ln 3 + 5$

6. i

7. $4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 6 = = (2x-1)^2 - 6$

8. $-\sqrt{3}$

9. $x = \dfrac{1}{3}.$

10. En cirkel med MP: (0,-3) (alt: MP i punkten -3i), radien =5.

11. $\ln(x-2) + \ln x = 3\ln 2 \;\Rightarrow\; \ln((x-2)\cdot x) = \ln 2^3 \;\Leftrightarrow\; (x-2)\cdot x = 2^3 \;\Leftrightarrow$
$x^2 - 2x - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$ eller -2.
$x = -2$ är en falsk rot, ty x måste vara strängt större än noll.
Svar: $x = 4$.

12. Polynomdivision ger $\dfrac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}.$
Svar: Kvot: $k(x) = 2x - 2$, rest: $r(x) = 2x - 4$.

13. $-10 + \sqrt{4x+4} = -2x \;\Leftrightarrow\; \sqrt{4x+4} = 10 - 2x$ **(** Kvadrering) $\Rightarrow\; 4x + 4 = (10-2x)^2$
$\Leftrightarrow\; 4x + 4 = 100 - 40x + 4x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 11x + 24 = 0$ **(1)** $\Leftrightarrow\; x = 8$ eller 3.
En kontroll i ekv. (1) ger att bara $x = 3$ duger.

Alt:

$-10+\sqrt{4x+4}=-2x \Leftrightarrow \sqrt{4x+4}=10-2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{4(x+2)}=2(5-x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=2(5-x) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=(5-x)$.

Kvadreringen $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(5-x)^2$ ger ekvation **(1)** se ovan.

Svar: $x=3$.

14. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ Vi får två fall:

1) $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi,\ n\in Z$

$2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$

$2x=-\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$

$x=-\frac{\pi}{12}+n\cdot\pi$

2) $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi,\ n\in Z$

$2x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$

$2x=\frac{3\pi}{6}+n\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$

$x=\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi$

Svar: $x=-\frac{\pi}{12}+n\cdot\pi$ eller $x=\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi,\ n\in Z$

15. $2x^2+2y^2-4x+12y=12$. Vi förkortar med 2 : $x^2-2x+y^2+6y=6$

Kvadratkomplettering ger $(x-1)^2-1+(y+3)^2-9=6 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=16$

Svar: En cirkel med medelpunkt i punkten $(1,-3)$ och radie 4.

16. Med $z=x+iy$ och därmed $\bar{z}=x-iy$ får vi

$3(x+iy)-i(x-iy)=7-5i \Leftrightarrow 3x+i3y-ix-y=7-5i \Leftrightarrow$

$3x-y+i(-x+3y)=7-5i$

Jämförelse av realdel och imaginärdel ger

$$\begin{cases} 3x-y=7 \\ -x+3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Svar: $z=2-i$.

17. $3^x+3-4\cdot 3^{-x}=0$ Sätt $t=3^x$ då $3^{-x}=\frac{1}{3^x}=\frac{1}{t}$

Vi får $t+3-\frac{4}{t}=0 \Leftrightarrow t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow t=-4$ eller $t=1$

1) $3^x=-4$ Denna ekvation saknar lösning. 2) $3^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Svar: $x=0$.

18 $x^3+6x^2+5x-12=0$. Gissning ger roten $x=1$.

Polynomdivision med $x-1$ ger ekvationen

$(x-1)(x^2+7x+12)=0$

$x^2+7x+12=0 \iff x=-3,-4.$

Svar: Ekvationen har rötterna $1,-3$ och -4.

19. $\frac{1}{x}\geq 2x-1 \iff 2x-1-\frac{1}{x}\leq 0 \iff \frac{2x^2-x-1}{x}\leq 0 \iff$

$\frac{2(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})}{x}\leq 0 \iff \frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{x}\leq 0$ Sätt $f(x)=\frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{x}$

Teckenschema

x		$-\frac{1}{2}$		0		1	
$x+\frac{1}{2}$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$\frac{2}{x}$	-		-	odef.	+		+
$f(x)$	-	0	+	odef.	-	0	+

Svar: $0<x\leq 1$ eller $x\leq -\frac{1}{2}$.

20. $\left(\frac{1}{\cos x}+\tan x\right)\left(\frac{1}{\cos x}-\tan x\right)=\frac{1}{\cos^2 x}-\tan^2 x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=$

$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=1$ V.S.B

SLUT!